4. Modulação em Frequência

A onda modulada em frequência, onda FM, *s(t)* definida pela Eq. 1 é uma função não linear da onda moduladora *m(t)*. Portanto, a modulação em frequência é um *processo não linear de modulação*. Consequentemente, ao contrário da modulação de amplitude, o espectro de uma onda FM não está relacionado de uma forma simples com o espectro da onda moduladora. O modo tradicional de estudar as propriedades espectrais das ondas FM começa pelo estudo da modulação de uma onda de tom único (uma frequência pura) e continuar a partir daí para o estudo da modulação de sinais com mais do que uma frequência.

$$s(t) = A_c \cos\left[2p\, f_c + 2p k_f \int_0^t m(t)dt\right] \tag{1}$$

4. 1. Modulação em Frequência de tom único

Considere-se, então, uma onda moduladora de tom único, sinusóidal, definida por

$$m(t) = A_m \cos(2p\, f_m t) \tag{2}$$

A frequência instantânea da onda FM resultante é igual a

$$\begin{aligned} f_i(t) &= f_c + k_f A_m \cos(2p\, f_m t) \\ &= f_c + \Delta f \cos(2p\, f_m t) \end{aligned} \tag{3}$$

em que

$$\Delta f = k_f A_m \tag{4}$$

A quantidade *Df* é chamada de *desvio de frequência* e representa o máximo afastamento da frequência instantânea de uma onda FM em relação à frequência da portadora, f_c. A característica fundamental de uma onda FM é que o desvio de frequência *Df* é proporcional à amplitude da onda moduladora e é independente da frequência de modulação, ou da portadora, f_c.

Usando a Eq. 3, o argumento *q (t)* da onda FM é obtido por

$$\begin{aligned} q(t) &= 2p \int_0^t f_i(t)dt \\ &= 2p\, f_c t + \frac{\Delta f}{f_m} sin(2p\, f_m t) \end{aligned} \tag{5}$$

A taxa entre o desvio de frequência *Df* e a frequência moduladora f_m é chamada de *índice de modulação* de uma onda FM. Dando-lhe o nome de *b*, pode-se escrever

$$b = \frac{\Delta f}{f_m} \tag{6}$$

e

$$q(t) = 2p\, f_c t + b sin(2p\, f_m t) \tag{7}$$

Da Eq. 7 pode-se ver que, de um ponto de vista físico, o parâmetro *b* representa o desvio de fase da onda FM. Isto é, o máximo afastamento do argumento angular *q (t)* do ângulo $2pf_ct$ da portadora não modulada.

4.2. Análise Espectral de uma onda sinusóidal modulada em frequência

Usando um formalismo matemático que está para além do programa desta disciplina é possível deduzir a representação em série de Fourier de uma onda FM de tom único e chegar-se à seguinte equação que é válida para qualquer valor arbitrário de b.

$$s(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(b) \cos[2p(f_c + nf_m)t] \qquad (8)$$

em que $J_n(b)$ se designa por *função Bessel de ordem n de primeira espécie e argumento* b, e é o integral

$$J_n(b) = \frac{1}{2p} \int_{-p}^{p} \exp[j(b\sin x - nx)]dx \qquad (9)$$

A figura 1 mostra os valores da função Bessel $J_n(b)$ em função de b para vários valores de n (n=0, 1, 2, 3 e 4). Da figura é possível constatar duas propriedades: Primeiro, que para um n fixo, $J_n(b)$ alterna entre valores positivos e negativos à medida que b aumenta. Segundo, que $|J_n(b)|$ se aproxima de zero quando b se aproxima de infinito.

Sabe-se também que para b fixo se tem

$$J_{-n}(b) = \begin{cases} J_n(b), & n \quad par \\ -J_n(b) & n \quad ímpar \end{cases} \qquad (10)$$

o que significa que basta representar $J_n(b)$ para valores positivos da ordem n.

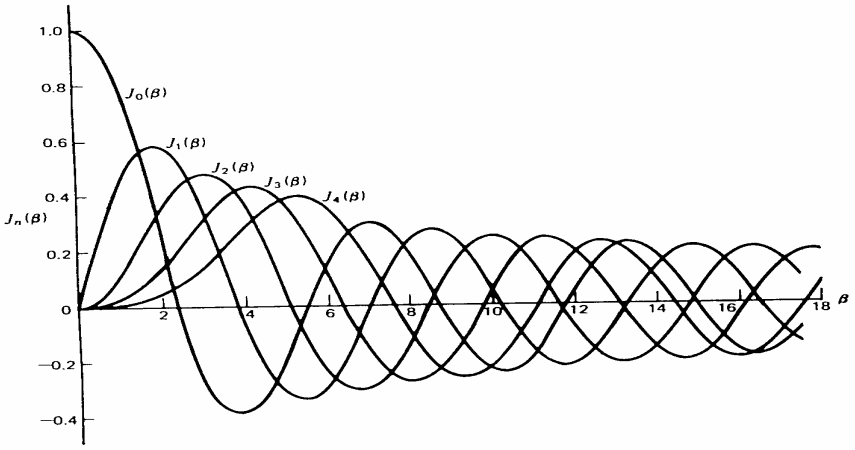

Figura 1
Valores da função Bessel da primeira espécie

Retornando à representação em série de Fourier da onda FM de tom único, Eq. 8, a função Bessel acaba simplesmente por ter o papel de introduzir vários factores constantes, um para cada valor de n do somatório, nessa expressão. O espectro discreto de $s(t)$ é obtido fazendo a transformada de Fourier dos dois lados da Eq. 8.

$$S(f) = \frac{A_c}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(b)[d(f - f_c - nf_m) + d(f + f_c + nf_m)] \qquad (11)$$

A partir das Eq. 1 e Eq. 8, é possível deduzir as seguintes três propriedades das ondas FM.

Propriedade 1: FM de banda estreita

> Para valores de índice de modulação, β, pequenos comparados com um radiano, a onda FM assume uma forma de banda estreita consistindo essencialmente na portadora, numa componente na parte superior de frequência e noutra componente na parte inferior de frequência.

Para compreender esta propriedade vejam-se os valores de $J_n(\beta)$ para valores muito pequenos de β.

$$\begin{aligned} J_0(\beta) &\approx 1 \\ J_1(\beta) &\approx \frac{\beta}{2} \\ J_n(\beta) &\approx 0 \qquad\qquad n > 1 \end{aligned} \tag{12}$$

Se considerarmos $\beta \leq 0.3$ radianos, estas aproximações são plenamente justificadas. Sendo assim, substituindo agora na Eq. 8 tem-se

$$\begin{aligned} s(t) \approx A_c \cos[2\pi f_c t] &+ \frac{\beta A_c}{2}\cos[2\pi (f_c + f_m)t] \\ &- \frac{\beta A_c}{2}\cos[2\pi (f_c - f_m)t] \end{aligned} \tag{13}$$

O que esta equação mostra é que para valores pequenos de β a onda FM pode ser aproximada pela soma de uma onda portadora de amplitude A_c, com uma onda com uma frequência maior e amplitude $\beta A_c/2$, e ainda com uma onda com uma frequência menor e amplitude $\beta A_c/2$ e uma translação de fase de 180^o (representada pelo sinal negativo na Eq. 13).

A este tipo de onda FM chama-se FM de *banda estreita*.

Propriedade 2: FM de banda larga

> Para valores de índice de modulação, β, grandes comparados com um radiano, a onda FM (em teoria) contém a portadora e um número infinito de componentes de frequências laterais localizadas simetricamente em relação à frequência da portadora.

Esta propriedade é simplesmente a Eq. 8 sem nenhumas aproximações. A este tipo de ondas chama-se FM de *banda larga*. Notar que a amplitude do componente da portadora nesta onda varia com o índice de modulação β de acordo com $J_0(\beta)$.

Propriedade 3: Potência média constante

> A envolvente de uma onda FM é constante, pelo que a potência média dessa onda dissipada numa resistência de 1 ohm também é constante.

Esta propriedade vem directamente da definição de uma onda FM dada pela Eq. 1. Mais especificamente, a onda FM $s(t)$ definida pela Eq. 1 tem uma envolvente constante dada por A_c. Assim, a potência média dissipada por $s(t)$ numa resistência de 1 ohm é dada por

$$P = \frac{1}{2}A_c^2 \tag{14}$$

Este resultado poderia ser também derivado a partir da Eq. 8. Nomeadamente, a partir da expansão em série da Eq. 8, a potência média de uma onda FM de tom único *s(t)* pode ser expressa na forma

$$P = \frac{1}{2} A_c^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(b) \qquad (15)$$

Atendendo a uma propriedade da função Bessel que diz que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(b) = 1 \qquad (16)$$

pode-se substituir este resultado na Eq. 15 levando à Eq. 14.

Exemplo 1

Pretende-se investigar em que formas as variações na amplitude e na frequência da sinusóide moduladora afectam o espectro da onda FM. Considere primeiro o caso em que a frequência da onda moduladora é fixa, mas a sua amplitude varia, produzindo uma variação correspondente no desvio de frequência *Df*. Assim, mantendo a frequência de modulação f_m fixa, o espectro de amplitude da onda FM resultante fica como mostrado na figura 2 para β = 1, 2, e 5. Na figura normalizou-se o espectro relativamente à amplitude da portadora quando não modulada.

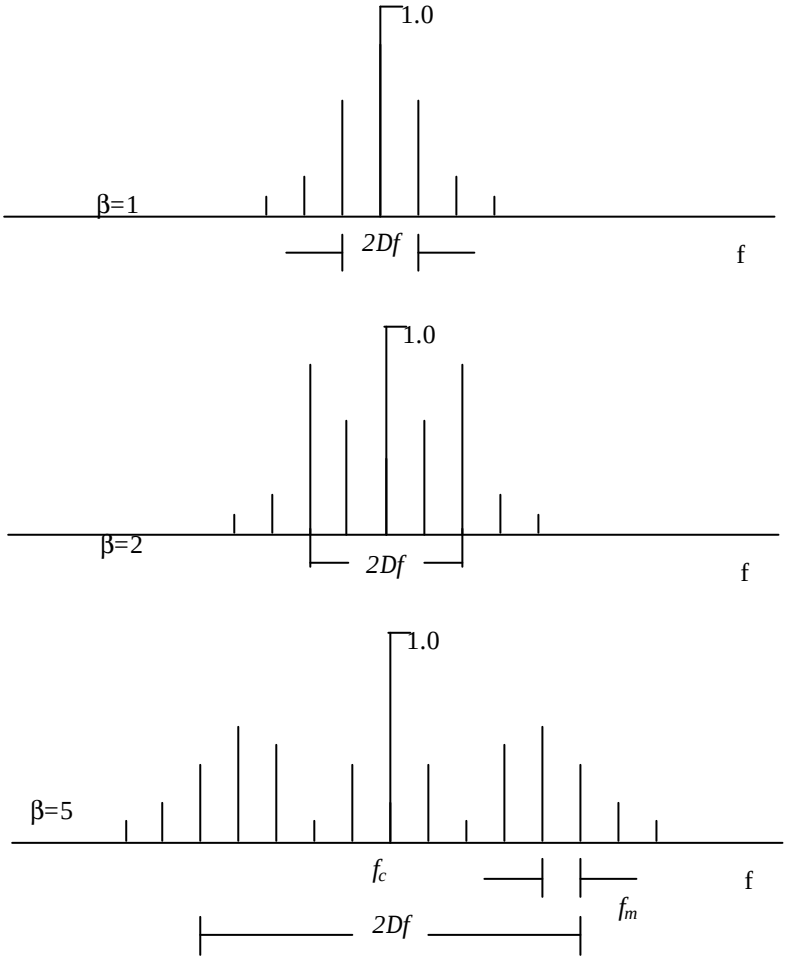

Figura 2
Espectro de amplitude discreto de um sinal FM, normalizado relativamente à amplitude da portadora, para o caso de uma modulação sinusóidal de frequência fixa e amplitude variável. Só é mostrado o espectro para frequências positivas.

Considerando agora o caso em que a amplitude da onda moduladora é fixa. Isto é, o desvio de frequência *Df* é constante e a frequência de modulação f_m varia. Neste caso, verifica-se que o espectro de amplitude da onda FM resultante fica como o mostrado na figura 3 para os casos de β = 1, 2, e 5. Vê-se que quando *Df* é fixo e *b* aumenta se tem um aumento de linhas espectrais que se juntam num intervalo fixo de frequência definido por $f_c - Df < f < f_c + Df$. Isto é, quando *b* se aproxima de infinito, a largura de banda de uma onda FM se aproxima do valor limite de *2Df*.

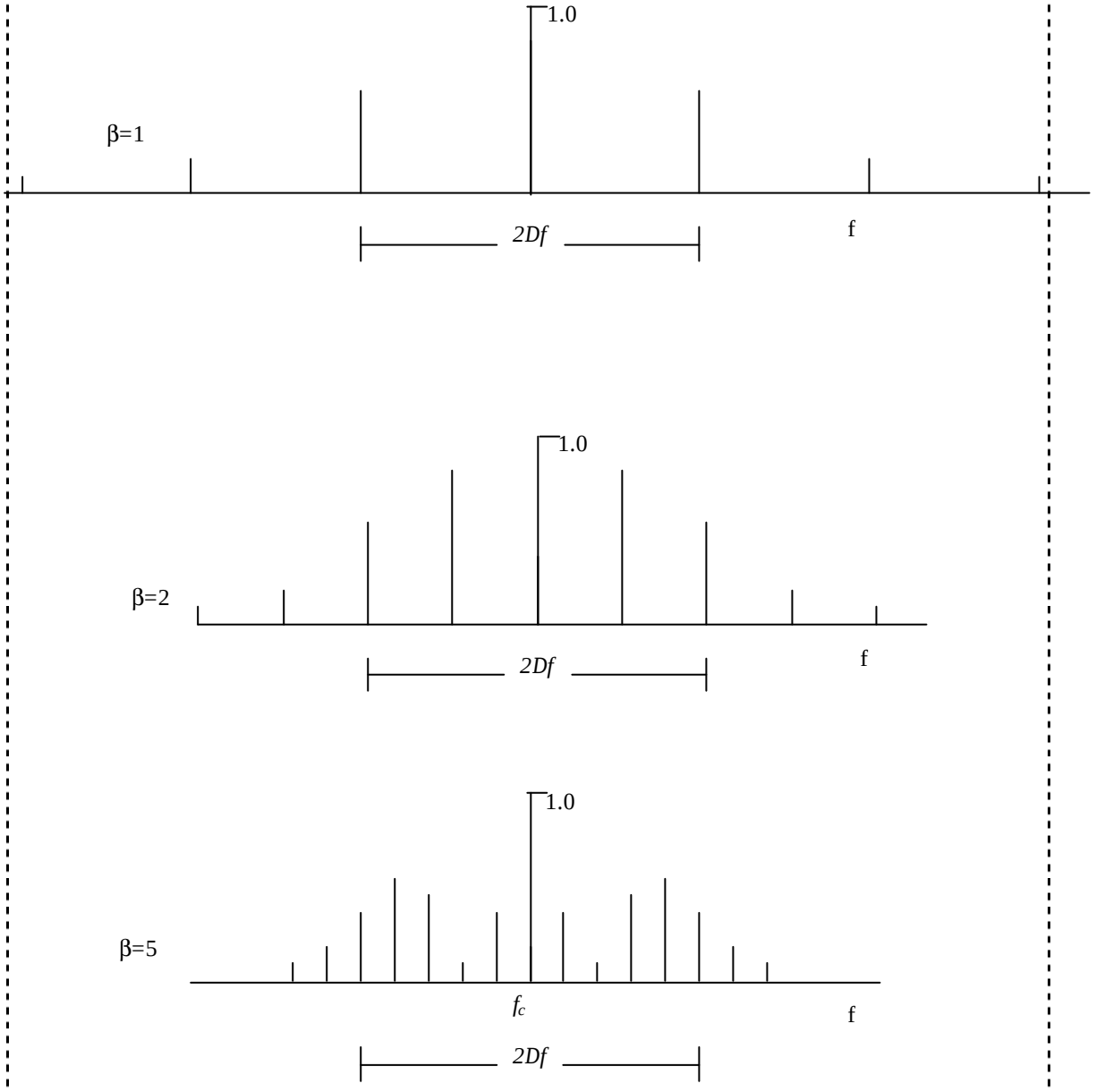

Figura 3
Espectro de amplitude discreto de um sinal FM, normalizado relativamente à amplitude da portadora, para o caso de uma modulação sinusóidal de frequência variável e amplitude fixa. Só é mostrado o espectro para frequências positivas.

4.3. Largura de banda de transmissão para ondas FM

Em teoria, uma onda FM contém um número infinito de frequências laterais pelo que a largura de banda requerida para transmitir esse sinal é igualmente infinita na sua extensão. Na prática, porém, descobre-se que a onda FM é efectivamente limitada a um número finito de frequências laterais significativas compatível com uma certa quantidade de distorção. Pode-se, então, especificar uma largura de banda efectiva que seja requerida para a transmissão de uma onda FM.

Considere-se primeiro o caso de uma onda FM gerada a partir de uma onda moduladora de tom único de frequência f_m. Nesta onda, as frequências laterais que estão separadas da frequência da portadora f_c por uma quantidade maior do que o desvio de frequência Df, decrescem rapidamente para zero, pelo que a largura de banda excede sempre a excursão total da frequência, mas é sempre limitada. Mais especificamente, para grandes valores do índice de modulação b, a largura de banda aproxima-se, e é só ligeiramente superior, à excursão total de frequência $2\,Df$. Por outro lado, para pequenos valores do índice de modulação b, o espectro da onda FM é efectivamente limitado pela frequência da portadora f_c e um par de frequências laterais em $f_c \pm f_m$, pelo que a largura de banda se aproxima de $2f_m$. Pode-se, assim, definir uma regra aproximada para a largura de banda de transmissão de uma onda FM gerada por uma onda moduladora de tom único igual a f_m, como

$$B \approx 2\Delta f + 2f_m = 2\Delta f\left(1+\frac{1}{b}\right) \qquad (17)$$

Esta relação é conhecida como a regra de Carson.

Para um cálculo mais preciso da largura de banda requerida para uma onda FM, pode-se usar a definição baseada na retenção do número máximo de frequências laterais com amplitudes maiores do que um certo valor estipulado. Uma escolha conveniente para este valor pode ser 1% da amplitude da onda portadora não modulada. Pode-se, então, definir a *largura de banda a 99 por cento de uma onda FM como o intervalo entre as duas frequências a partir das quais nenhuma das frequências laterais é maior do que 1% da amplitude da portadora obtida quando a modulação é retirada*. Isto é, definimos a largura de banda de transmissão como $2n_{max}f_m$, em que f_m é a frequência de modulação e n_{max} é o máximo valor do inteiro n que satisfaz o requisito $|J_n(b)| < 0.01$.

O valor de n_{max} varia com o índice de modulação b e pode ser determinado de imediato a partir dos valores tabelados da função de Bessel $J_n(b)$. A tabela 1 mostra o número total de frequências laterais significativas (incluindo ambas as frequências laterais extremas de cima e de baixo) para diferentes valores de b, calculados na base do 1% explicado. A largura de banda de transmissão B calculada usando este procedimento pode ser apresentada na forma de uma curva universal, normalizada com respeito ao desvio de frequência Df, em função do índice de modulação b. Esta curva está mostrada na figura 4, que foi desenhada correspondendo à melhor curva que se ajusta aos pontos da tabela 1. Na figura 4 nota-se que à medida que o índice de

Índice de Modulação	**Número máximo de frequências laterais**
β	$2n_{max}$
0.1	2
0.3	4
0.5	4
1.0	6
2.0	8
5.0	16
10.0	28
20.0	50
30.0	70

Tabela 1
Número de frequências laterais significativas

modulação vai aumentando a largura de banda ocupada pelas frequências laterais significativas cai para um valor que é o que a frequência da portadora realmente se desvia. Isto significa que pequenos valores do índice de modulação b são relativamente mais extravagantes em largura de banda de transmissão do que o são grandes valores de b.

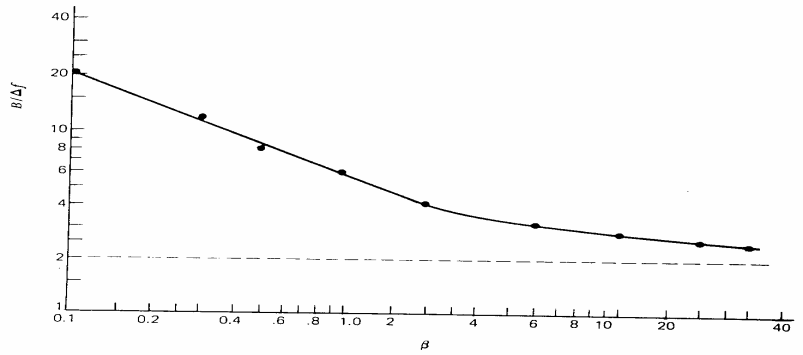

Figura 4
Curva universal para o cálculo da largura de banda a 99% de uma onda FM

Considere-se agora uma onda modulante qualquer, *m(t)*, com o seu componente de maior frequência designado por W. A largura de banda requerida para transmitir uma onda FM gerada por esta onda modulante é estimada usando o pior caso da análise de tom único. Mais especificamente, começamos por determinar o que se chama de *taxa de desvio*, *D*, definida como a razão do desvio de frequência *Df* (que corresponde à máxima amplitude possível da onda modulante *m(t)*) pela frequência máxima de modulação *W*. Estas condições representam os casos extremos possíveis. *A taxa de desvio D tem o mesmo papel para modulações não sinusóidais do que o índice de modulação b tem para o caso de modulações sinusóidais.* Então, substituindo b por D e substituindo f_m por W usa-se a regra de Carson dada pela Eq. 17, ou a curva universal da figura 4 para obter o valor para a largura de banda de transmissão da onda FM. De um ponto de vista prático, a regra de Carson subestima a largura de banda requerida para um sistema FM, enquanto que usando a curva universal da figura 4 se chega a um valor mais conservador. Assim, a escolha da largura de banda de transmissão que está entre os limites dados por estas duas regras de ouro é aceitável para a maioria dos casos práticos.

Exemplo 2

Nos Estados Unidos da América, o valor máximo do desvio de frequência *Df* é fixado em 75 kHz para radiodifusão de rádios comerciais em FM. Se considerarmos que a frequência modulante é W=15kHz, que é tipicamente a frequência áudio máxima de interesse em transmissão FM, vemos que o valor correspondente para a taxa de desvio é de

$$D = \frac{75}{15} = 5$$

Usando a regra de Carson da Eq. 17, substituindo b por D e substituindo f_m por W, o valor aproximado da largura de banda de transmissão de uma onda FM é obtido como

$$B = 2(75+15) = 180\ kHz$$

Por outro lado, usando a curva universal da figura 4 a largura de banda de transmissão deveria ser de

$$B = 3.2\Delta f = 3.2x75 = 240\ kHz$$

Assim, a regra de Carson subestima a largura de banda de transmissão em 25% comparada com o resultado de se usar a curva da figura 4.

4.4. Geração de ondas FM

Existem, essencialmente, dois métodos básicos de geração de ondas moduladas em frequência: *FM directo* e *FM indirecto*. No método indirecto de produzir modulação em frequência, a onda modulante é usada primeiramente para produzir uma onda FM de banda estreita, e uma multiplicação de frequência é usada depois para aumentar o desvio de frequência para o nível desejado. Por outro lado, no método directo de produzir modulação de frequência a frequência da portadora é variada directamente de acordo com o sinal modulante. Nesta secção vão-se descrever os aspectos mais importantes dos dois métodos.

FM indirecto Considere-se primeiro a geração de uma onda FM de banda estreita. Para isso, começa-se com a expressão de uma onda FM $s_1(t)$ para o caso geral da onda modulante $m(t)$, que é escrita na seguinte forma

$$s_1(t) = A_1 \cos\left[2\pi f_1 t + f_1(t)\right] \tag{18}$$

em que f_1 é a frequência da portadora e A_1 é a amplitude da portadora. O argumento angular $f_1(t)$ de $s_1(t)$ está relacionado com $m(t)$ por

$$f_1(t) = 2\pi k_1 \int_0^t m(t)dt \tag{19}$$

em que k_1 é a sensibilidade de frequência do modulador. Desde que o ângulo $f_1(t)$ seja pequeno comparado com 1 radiano para todo o t, podem-se usar as seguintes aproximações:

$$\cos\left[f(t)\right] \approx 1 \tag{20}$$

$$sin\left[f(t)\right] \approx f(t) \tag{21}$$

Pode-se, então, escrever a Eq. 18 da seguinte forma

$$\begin{aligned} s_1(t) &= A_1 \cos(2\pi f_1 t) - A_1 sin(2\pi f_1 t) f_1(t) \\ &= A_1 \cos(2\pi f_1 t) - 2\pi k_1 A_1 sin(2\pi f_1 t) \int_0^t m(t)dt \end{aligned} \tag{22}$$

A Eq. 22 define uma *onda FM de banda estreita*. De facto, pode-se usar esta equação para construir o esquema mostrado na figura 5 para a geração de uma onda FM de banda estreita; o factor de escala $2\pi f_1$ é tratado pelo multiplicador modulador. Mais, considerando a relação que existe entre a modulação em fase e a modulação em frequência (ver figura 7.35 do livro), vemos que a parte do modulador em frequência que está dentro do rectângulo a tracejado da figura 5 representa um *modulador em fase de banda estreita*.

A onda modulada produzida pelo modulador de banda estreita da figura 5 difere de uma onda FM *ideal* em dois aspectos:

1. A envolvente contém uma modulação de amplitude *residual* e, portanto, varia no tempo.
2. Para uma onda modulante sinusóidal, a fase da onda FM contém *distorção harmónica* na forma de terceira ordem e ordens superiores de harmónicas da frequência de modulação f_m.

Porém, ao restringir o índice de modulação a $\beta \leq 0.3$ rad, os efeitos de AM residual e PM harmónico são limitados a níveis negligíveis.

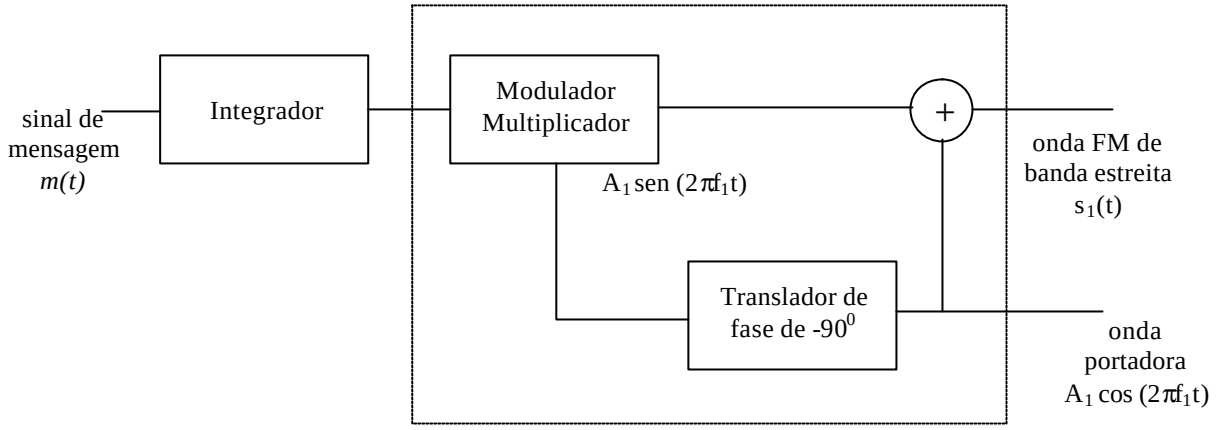

Figura 5
Diagrama de blocos para um modulador de frequência de banda estreita

O passo seguinte no método de FM indirecto é o de multiplicação na frequência. Basicamente, um *multiplicador de frequência* consiste num dispositivo não linear (por exemplo, um díodo ou um transistor) seguido por um filtro passa-banda, como está ilustrado na figura 6. É assumido que o dispositivo não linear seja *sem-memória*, o que significa que não existe nenhum armazenamento de energia. Em geral, um dispositivo não linear sem memória é representado pela seguinte relação entre a saída e a entrada:

$$s_2(t) = a_1 s_1(t) + a_2 s_1^2(t) + \ldots + a_n s_1^n(t) \qquad (23)$$

em que a_1, a_2, ..., a_n são coeficientes constantes. Substituindo a Eq. 22 na Eq. 23, expandindo e reduzindo termos, vê-se que $s_2(t)$ tem uma componente dc e n ondas moduladas em frequência com frequências de portadora de f_1, $2f_1$, ..., nf_1 e desvios de frequência de Df_1, $2Df_1$, ..., nDf_1, respectivamente. O valor de Df_1 é determinado pela sensibilidade de frequência k_1 do modulador em frequência de banda estreita e pela amplitude máxima da onda modulante $m(t)$. Percebe-se, assim, a razão da existência de um filtro passa-banda na figura 6. Especificamente, o filtro é desenhado com dois objectivos em mente:

1. Passar a onda FM centrada na frequência da portadora nf_1 e com um desvio de frequência nDf_1.
2. Suprimir todo o outro espectro FM.

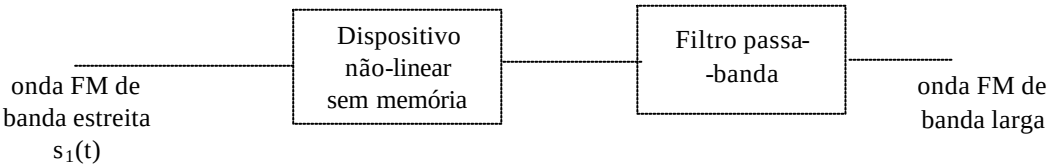

Figura 6
Diagrama de blocos para um multiplicador de frequência

Assim, ligando o modulador de frequência em banda estreita e o multiplicador de frequência, como está mostrado na figura 7, podemos gerar uma onda FM de banda larga $s(t)$ com frequência da portadora $f_c=nf_1$, e desvio de frequência $Df=nDf_1$, tal como se pretendia. Pode-se escrever

$$s(t) = A_c \cos\left[2p\, f_c t + 2p k_f \int_0^t m(t)dt\right] \qquad (24)$$

em que

$$k_f = nk_1 \qquad (25)$$

Por outras palavras, o modulador em frequência de banda larga da figura 7 tem uma sensibilidade *n* vezes superior ao modulador em frequência de banda estreita da figura 5, em que *n* é o factor multiplicativo da frequência. Na figura 7, o bloco "*oscilador controlado por cristal*" é usado como o gerador da portadora para se ter uma maior estabilidade de frequência.

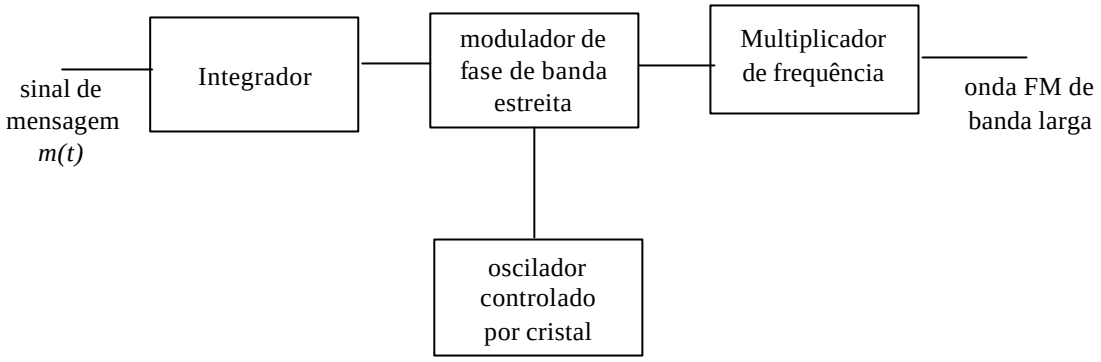

Figura 7
Diagrama de blocos para um modulador de frequência de banda larga

Exemplo 3

A figura 8 mostra um diagrama de blocos simplificado de um transmissor FM típico (baseado no método indirecto) usado para transmitir sinais áudio contendo frequências na gama de 100 Hz a 15 kHz. O modulador em fase de banda estreita é fornecido com uma onda portadora de frequência $f_1=0.1$ MHz por um oscilador controlado por cristal. A onda FM desejada à saída do transmissor tem uma frequência de portadora f_c=100MHz e um desvio de frequência Df=75kHz.

De modo a limitar a distorção harmónica produzida pelo modulador de fase de banda estreita, restringe-se o índice de modulação b_1 a um valor máximo de 0.3 rad. Suponha-se então que b_1=0.2 rad.

Da Eq. 6 vê-se que para uma modulação sinusóidal, o desvio de frequência Df é igual ao índice de modulação b multiplicado pela frequência de modulação f_m. Portanto, para um índice de modulação fixo, a mais baixa frequência de modulação limita o desvio de modulação na saída do modulador em fase de banda estreita. Assim, com b_1=0.2 as frequências de modulação de 100 Hz limitam o desvio de frequência Df_1 a 20 Hz.

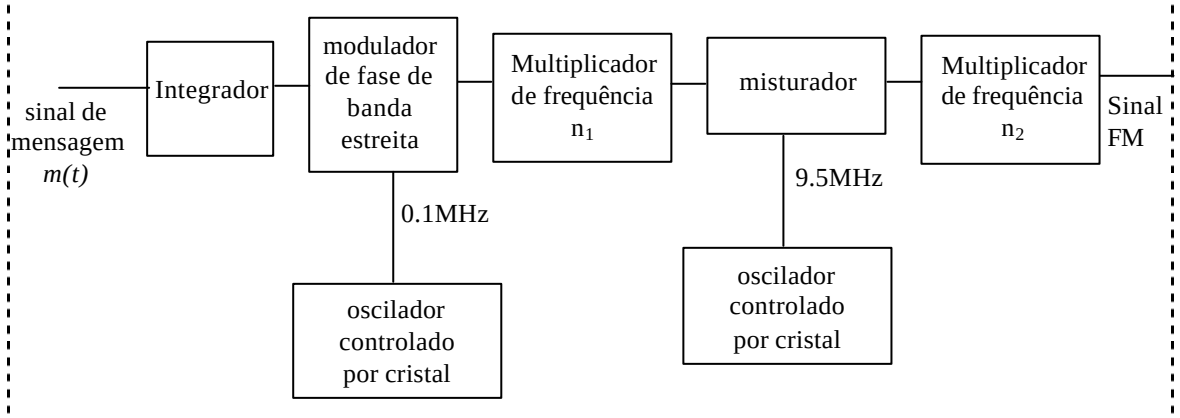

Figura 8
Diagrama de blocos de um modulador de frequência de banda larga

Para produzir um desvio de frequência de Df=75kHz à saída do transmissor FM, o uso de um multiplicador de frequência é necessário. Especificamente, com Df_1=20 Hz e Df=75kHz

necessita-se de um factor total de multiplicação de frequência de 3750. Porém, usando um multiplicador de frequência único igual a este valor produziríamos uma frequência da portadora muito maior à saída do transmissor do que o valor desejado de 100 MHz. Para gerar uma onda FM com o desvio de frequência e a frequência da portadora desejados, necessitamos de usar um multiplicador de frequência de dois andares com um andar intermédio de translação de frequência, como está ilustrado na figura 8.

Sejam n_1 e n_2 os factores de multiplicação do multiplicador de frequência, tal que

$$n_1 n_2 = \frac{\Delta f}{\Delta f_1} = \frac{75000}{20} = 3750$$

A frequência da portadora à saída do primeiro multiplicador de frequência é transladada para baixo na frequência para (f_2-$n_1 f_1$) pela mistura dela com uma onda sinusóidal de frequência f_2=9.5MHz, a qual é fornecida pelo segundo oscilador controlado por cristal. Porém, a frequência da portadora à entrada do segundo multiplicador é igual a f_c/n_2. Igualando estas duas equações, temos

$$f_2 - n_1 f_1 = \frac{f_c}{n_2}$$

Assim, com f_1=0.1MHz, f_2=9.5MHz, e f_c=100MHz temos

$$9.5 - 0.1\, n_1 = \frac{100}{n_2}$$

Resolvendo a primeira e terceira equações deste exemplo para n_1 e n_2, obtemos

$$n_1 = 75$$
$$n_2 = 50$$

Usando estes factores de multiplicação para o multiplicador de frequência, obtém-se o conjunto de valores indicados na tabela em baixo.

	À saída do modulador de fase	**À saída do primeiro multiplicador**	**À saída do misturador**	**À saída do segundo multiplicador**
frequência da portadora	0.1 MHz	7.5MHz	2.0MHz	100MHz
desvio de frequência	20 Hz	1.5 kHz	1.5 kHz	75 kHz

Tabela 2
Valores da frequência da portadora e do desvio de frequência para vários pontos no modulador de frequência da figura 8.

FM directo No método directo de geração de FM, a frequência instantânea da onda portadora é variada directamente de acordo com o sinal mensagem, *m(t)*, pelo uso de um dispositivo conhecido por *oscilador controlado por voltagem* (VCO). Um VCO é um dispositivo que oscila a uma frequência f_0, quando não tem nenhuma tensão à entrada. A esta frequência dá-se o nome de *frequência não-modulada de oscilação*. Quando se aplica uma tensão à entrada, negativa ou positiva, ele oscila à frequência f_i, dada pela seguinte equação

$$f_i(t) \approx f_0 + k_f m(t) \tag{26}$$

em que k_f é a sensibilidade do modulador à frequência e *m(t)* é a tensão de entrada que é o sinal a modular. Uma desvantagem de um transmissor de FM usando o método directo é que a frequência da portadora não é dada por um oscilador altamente estável como o é um controlado por cristal. Na prática, usam-se circuitos auxiliares de modo a proporcionar a estabilidade desejada.

4.5. Desmodulação de ondas FM

O processo de desmodulação em frequência é o inverso do de modulação no sentido que permite que a onda modulante original seja recuperada a partir da onda modulada em frequência. Concretamente, para se fazer a desmodulação em frequência é necessário um dispositivo de duas partes que produz um *sinal à saída com amplitude directamente proporcional à frequência instantânea da onda FM aplicada à entrada.* A este dispositivo chama-se desmodulador em frequência.

Existem vários métodos de desenhar um desmodulador em frequência. Eles são classificados em duas grandes categorias: (1) *directos* e (2) *indirectos*. Os métodos directos aplicam directamente a definição de frequência instantânea, e o exemplo que se vai estudar aqui é o *detector de passagens por zero.* Os métodos indirectos usam circuitos *com realimentação* para *seguir* variações da frequência instantânea do sinal de entrada. O *phase-locked loop* é o exemplo desta categoria que se vai estudar.

Detector de passagens por zero Este detector explora a propriedade que a frequência instantânea de uma onda FM é dada aproximadamente por

$$f_i(t) \approx \frac{1}{2\Delta t} \tag{27}$$

em que *Dt* é a diferença de tempo entre duas passagens por zero consecutivas de uma onda FM, tal como está ilustrado na figura 9. Considere um intervalo *T* escolhido de acordo com as seguintes duas condições:

1. O intervalo *T* é pequeno comparado com o inverso da largura de banda do sinal *W*.
2. O intervalo *T* é grande comparado com o inverso da frequência da portadora f_c da onda FM.

A condição 1 diz que o sinal de mensagem *m(t)* é essencialmente constante dentro do intervalo *T*. A condição 2 assegura que existe um número razoável de passagens por zero da onda FM no intervalo *T*. A forma de onda FM mostrada na figura 9 ilustra estas duas condições. Seja n_0 o número de passagens por zero dentro do intervalo *T*. Podemos então expressar o tempo *Dt* entre passagens por zero consecutivas como

$$\Delta t = \frac{T}{n_0} \tag{28}$$

Portanto, pode-se escrever a Eq. 27 como

$$f_i(t) \approx \frac{n_0}{2T} \tag{29}$$

Como, por definição, a frequência instantânea está directamente relacionada com o sinal de mensagem *m(t)*, vemos pela Eq. 29 que *m(t)* pode ser recuperado a partir do conhecimento de n_0. A figura 10 mostra um diagrama de blocos simplificado de um detector de passagens por

zero baseado neste princípio. O limitador produz uma versão de onda quadrada da onda FM de entrada. O gerador de pulsos produz pequenos pulsos nas passagens para cima e para baixo da onda quadrada do limitador. Finalmente o integrador faz uma média sobre o intervalo T, tal como indicado na Eq. 29, reproduzindo, assim, o sinal mensagem original $m(t)$ como saída.

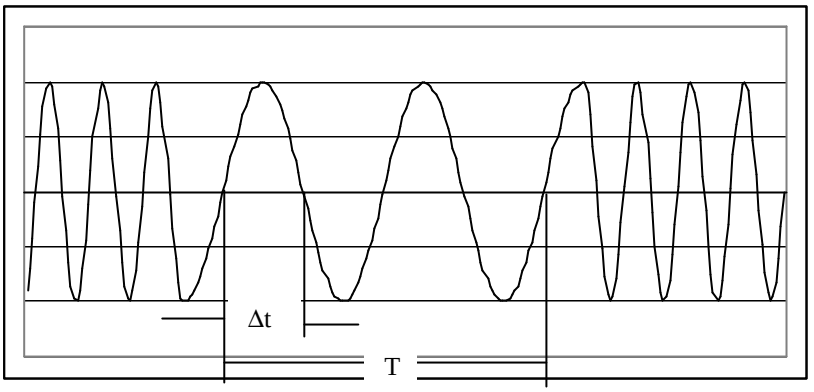

Figura 9
Ilustração da Eq. 28

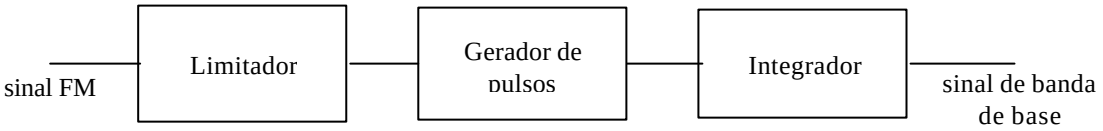

Figura 10
Diagrama de blocos de um detector de passagens por zero

Phase-Locked Loop

O *phase-locked loop* (PLL) é um sistema com realimentação negativa que consiste em três componentes principais: um *multiplicador*, um *filtro* e um *VCO* ligados como mostra a figura 11. O VCO é um gerador de uma onda sinusóidal cuja frequência é determinada pela tensão aplicada à sua entrada por uma fonte externa. Com efeito, qualquer modulador em frequência pode servir como VCO.

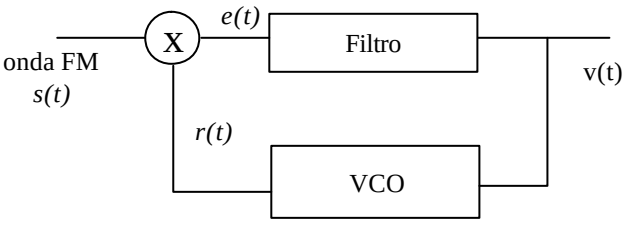

Figura 11
Phase-locked loop

Assume-se que inicialmente se ajustou o VCO de tal modo que se a tensão externa de controlo é zero se verificam as seguintes duas condições: (1) a frequência do VCO é precisamente igual à frequência não modulada da portadora, f_c; e (2) a saída do VCO tem uma translação de 90^0

relativamente à onda não modulada da portadora. Supondo que o sinal de entrada aplicado ao PLL é uma onda FM definida por

$$s(t) = A_c \sin[2p\, f_c t + f_1(t)] \tag{30}$$

em que A_c é a amplitude da portadora. Com uma onda modulante *m(t)*, temos

$$f_1(t) = 2pk_f \int_0^t m(t)dt \tag{31}$$

em que k_f é a sensibilidade à frequência do modulador de frequência. Seja a saída do VCO definida por

$$r(t) = A_v \cos[2p\, f_c t + f_2(t)] \tag{32}$$

em que A_v é a amplitude. Com a tensão de controlo *v(t)* aplicada à entrada do VCO, tem-se

$$f_2(t) = 2pk_v \int_0^t v(t)dt \tag{33}$$

em que k_v é a sensibilidade à frequência do VCO, medida em Hertz por Volt. A onda FM de entrada, *s(t)* e a saída do VCO, *r(t)*, são aplicadas ao multiplicador, produzindo duas componentes[1]

1. Uma componente de alta frequência representada por

$$k_m A_c A_v \sin[4p\, f_c t + f_1(t) + f_2(t)]$$

2. Uma componente de baixa frequência representada por

$$k_m A_c A_v \sin[f_1(t) - f_2(t)]$$

em que k_m é o *ganho do multiplicador*[2], medido em volt^{-1}.

A componente de alta frequência é eliminada pela acção do filtro passa-baixo e pelo VCO. Portanto, descartando a componente de alta frequência, a entrada do filtro é dada por

$$e(t) = k_m A_c A_v \sin[f_e(t)] \tag{34}$$

em que $f_e(t)$ é o <u>*erro de fase*</u> definido por

$$\begin{aligned} f_e(t) &= f_1(t) - f_2(t) \\ &= f_1(t) - 2p\, k_v \int_0^t v(t)dt \end{aligned} \tag{35}$$

O filtro opera na sua entrada *e(t)* para produzir a saída

[1] A multiplicação de um seno por um coseno pode ser transformada na soma de dois senos pela fórmula seguinte

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a-b) + \sin(a+b)]$$

[2] O circuito do multiplicador, para além de multiplicar as entradas, pode ter um ganho.

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(t)h(t-t)dt \tag{36}$$

em que *h(t)* é a resposta impulsiva do filtro.
Usando as Eq. 34 a 36 para relacionar $f_e(t)$ e $f_1(t)$, e diferenciando com respeito ao tempo, temos

$$\frac{df_e(t)}{dt} = \frac{df_1(t)}{dt} - 2p K_0 \int_{-\infty}^{\infty} sin[f_e(t)]h(t-t)dt \tag{37}$$

em que K_0 é o parâmetro do *loop* definido por

$$K_0 = k_m k_v A_c A_v \tag{38}$$

O parâmetro K_0 tem um papel importante na operação do PLL. Tem a dimensão de frequência, pois A_c e A_v são medidos em Volt, o ganho do multiplicador k_m é medido em volt^{-1}, e a sensibilidade do VCO, k_v, em Hertz por Volt. De um modo simples, o K_0 vai definir o intervalo de frequências à volta da frequência da portadora, f_c, que a onda FM pode ter para que o PLL consiga "agarrar" as variações e cumprir o seu papel.

Quando o erro de fase $f_e(t)$ é zero, o PLL diz-se que está em *phase-lock*. Quando $f_e(t)$ é sempre muito pequeno comparado com 1 radiano, pode-se usar a aproximação

$$sin[f_e(t)] \approx f_e(t) \tag{39}$$

que é precisa num intervalo de 4% para $f_e(t)$ menor do que 0.5 rad. Neste caso diz-se que o PLL está próximo de *phase-lock*, e pode-se substituir $sin[f_e(t)]$ por $f_e(t)$ na Eq. 37.

Usando a função de transferência do filtro do PLL, e desde que ela obedeça certas condições, é possível chegar-se à seguinte equação que relaciona $v(t)$ com $f_1(t)$.

$$v(t) = \frac{1}{2p\ k_v}\frac{df_1(t)}{dt} \tag{40}$$

Quando o sinal de entrada é uma onda FM descrita pela Eq. 30, a fase $f_1(t)$ está relacionada com a onda modulante $m(t)$ pela Eq. 31. Então, substituindo a Eq. 31 na Eq. 40 vê-se que o sinal resultante à saída do PLL é dado por

$$v(t) \approx \frac{k_f}{k_v} m(t) \tag{41}$$

Isto é, a saída $v(t)$ do PLL é aproximadamente a mesma, excepto por um factor de escala de k_f/k_v, do que a mensagem original $m(t)$, e a desmodulação em frequência foi conseguida.

Um aspecto muito significativo do desmodulador PLL é que a largura de banda da onda FM de entrada pode ser muito maior do que a largura de banda do filtro. A largura de banda do filtro deve, aliás, ser restringida à do sinal em banda de base. Assim, a tensão de controlo do VCO tem a largura de banda do sinal, $m(t)$, enquanto que a saída do VCO é uma onda modulada em frequência de banda larga cuja frequência instantânea "segue" a da onda FM de entrada.

A grande complexidade dos PLLs tem a ver com a definição do filtro, e será estudado noutras disciplinas da Licenciatura.

Como curiosidade aconselha-se os alunos a lerem a aplicação II – Rádio FM e FM stereo – a partir da página 364 do livro recomendado.