FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

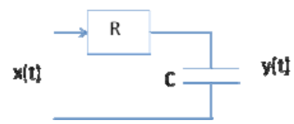
Departamento de Engenharia Electrotécnica
Secção de Telecomunicações

Introdução às Telecomunicações
Mestrado Integrado em Engenharia Electrotécnica
Rui Dinis
18 de Novembro de 2021
1º teste
Semestre Ímpar

Teste : 90 minutos.

Coloque o número no **canto superior direito** de todas as folhas e o nome na primeira folha, pelo menos. Responda às perguntas individualmente, e de um modo sucinto. Limite primeiramente as respostas aos pontos essenciais, e depois, no final, complete-as.
É permitido utilizar o formulário disponibilizado nas páginas electrónicas da disciplina.

1. [6 val] Considere o circuito RC da figura. Se o condensador estiver descarregado e aplicar-se um sinal de amplitude *A* na entrada, a saída fica $y(t) = A(1-\exp(-at))u(t)$.



a. Use esse resultado para obter a resposta a um escalão, designada por $s(t)$, ou seja a saída quando a entrada é um escalão unitário $u(t)$.
b. Calcule $S(f)$.
Resolução a), b):

$$x(t) = u(t) \Leftrightarrow A = 1$$

$$\Rightarrow \quad s(t) = (1-\exp(-at))u(t) = u(t) - \exp(-at)u(t)$$

$$\Rightarrow \quad S(f) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f} - \frac{1}{a + j2\pi f}$$

c. Mostre que a resposta impulsiva do circuito RC é do tipo $h(t) = b\exp(-at)u(t)$, identificando *b*. [Nota: A derivada da convolução não é a convolução das derivadas!]
Resolução:

$$s(t) = h(t) * u(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{ds(t)}{dt} = a\exp(-at)u(t) = \frac{d(h(t)*u(t))}{dt} = h(t) * \frac{du(t)}{dt} = h(t) * \delta(t) = h(t)$$

2. [14 val] Considere o sinal PAM $x(t) = \sum_k a_k r(t-kT)$ com $r(t) = \mathrm{sinc}(t/T)$ e $a_k = \pm A$ que é corrompido por ruído Gaussiano $w(t)$ com densidade espectral de potência $S_w(f) = N_0/2$. O sinal recebido $x(t)+w(t)$ é submetido a um filtro com resposta impulsiva $h(t) = \beta r(t)$, dando origem ao sinal $z(t)=y(t)+n(t)$ em que $y(t)$ e $n(t)$ são os termos de sinal e ruído, respectivamente.

a. Calcule a densidade espectral de potência de $x(t)$ e mostre que a respectiva energia média por bit é $E_b=A^2T$.
Resolução:

$$\overline{a_k} = 0, \quad \overline{a_k^2} = A^2, \quad R(f) = T\mathrm{rect}(fT) \;\Rightarrow\; S_x(f) = \frac{\overline{a_k^2}}{T}|R(f)|^2 = A^2 T\mathrm{rect}(fT)$$

$$P_x = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)df = A^2 \;\Rightarrow\; E_b = P_x T_b = A^2 T$$

b. Calcule a potência de $n(t)$.
Resolução:

$$P_n = \sigma_n^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_n(f)df = \int_{-\infty}^{\infty} S_w(f)|H(f)|^2\,df = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|H(f)|^2\,df = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|\beta R(f)|^2\,df = \frac{N_0}{2}|\beta|^2\,T$$

c. O sinal recebido é amostrado nos instantes kT, dando origem às amostras $z_k = y_k + n_k$. Mostre que $y_k = a_k \beta T$.
Resolução:

$$P(f) = R(f)H(f) = \beta |R(f)|^2 = \beta T^2 \mathrm{rect}(fT) \Rightarrow p(t) = \beta T \mathrm{sinc}(t/T)$$
$$\Rightarrow p(kT) = 0, k \neq 0 \Rightarrow y_k = y(kT) = a_k p(0) = a_k \beta T$$

d. Calcule a probabilidade de erro em função de E_b/N_0. Qual o impacto de β na probabilidade de erro? Comente.

Resolução:

$$P_e = Q\left(\frac{A\beta T}{\sigma_n}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{A^2\beta^2 T^2}{N_0\beta^2 T/2}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

O valor de β não altera a probabilidade de erro pois afecta o sinal e o ruído da mesma forma.

e. O sinal $x(t)$ é usado para transmitir um sinal binário correspondente à amostragem dum sinal com banda 1MHz seguida dum quantizador com 256 níveis. Qual a largura de banda necessária para transmitir o sinal $x(t)$?

Resolução:

$$B = 1\mathrm{MHz} \Rightarrow F_a \geq 2B = 2\mathrm{MHz}$$

$$L = 256 = 2^8 \Rightarrow R_b = 8F_a \geq 16\mathrm{Mbps} \Rightarrow B_{canal} = R_b/\varepsilon \geq R_b/2 = 8\mathrm{MHz}$$