



## Introdução às Telecomunicações

Departamento de Engenharia Eletrotécnica  
Secção de Telecomunicações  
Mestrado integrado em Engenharia Eletrotécnica e de Computadores  
Licenciatura em Engenharia Informática

Grupo: \_\_\_\_ nº \_\_\_\_ e \_\_\_\_

\_\_\_\_\_

### 5º Trabalho de Laboratório

**Objetivo Geral: Análise de Fourier de sinais periódicos e distorção harmónica.**

**ATENÇÃO: O material que vai utilizar é bastante oneroso, não existem componentes sobresselentes e acidentes como sobretensões ou curto-circuitos podem danificar irremediavelmente uma bancada de trabalho.**

**Siga as instruções dos relatórios e pense bem sempre que não houver indicações completas, antes de efetuar ligações.**

Este trabalho começa com um texto com explicações preliminares.

A segunda parte contém a descrição das experiências a efetuar.

## Explicações preliminares

Qualquer sinal periódico não sinusoidal com período  $T_0$  pode ser representado por uma série matemática, na qual os termos que a compõem são sinusoides. Cada uma destas harmónicas é caracterizada por uma amplitude  $S_n$ , uma fase  $\phi_n$  e frequência  $f_n = n f_0$ , onde  $f_0$  representa a frequência da harmónica fundamental. Por conseguinte, é possível representar estes sinais na forma

$$s(t) = s_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} s_n \cos(2\pi n f_0 t - \phi_n) \quad (1)$$

Como alternativa à representação do sinal em função de  $s_n$  e  $\phi_n$ , como descrito na equação (1), é possível representar o sinal utilizando 2 séries de Fourier, com coeficientes  $a_n$  e  $b_n$ . Neste caso, o sinal periódico pode ser descrito através da relação

$$s(t) = s_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi n f_0 t) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(2\pi n f_0 t) \quad (2)$$

em que

$$a_n = s_n \cos \phi_n \quad (3)$$

$$b_n = s_n \sin \phi_n \quad (3)$$

Substituindo (3) em (2) verifica-se que são válidas as relações

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi n f_0 t) = \sum_{n=1}^{+\infty} s_n \cos \phi_n \cos(2\pi n f_0 t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s_n}{2} [\cos(2\pi n f_0 t + \phi_n) + \cos(2\pi n f_0 t - \phi_n)] \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(2\pi n f_0 t) = \sum_{n=1}^{+\infty} s_n \sin \phi_n \sin(2\pi n f_0 t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s_n}{2} [-\cos(2\pi n f_0 t + \phi_n) + \cos(2\pi n f_0 t - \phi_n)] \quad (5)$$

Combinando as duas séries anteriores resulta

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi n f_0 t) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(2\pi n f_0 t) = \sum_{n=1}^{+\infty} s_n \cos(2\pi n f_0 t - \phi_n) \quad (6)$$

Recorrendo à representação complexa da série de Fourier, resulta

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_n \exp(2\pi n f_0 t) \quad (7)$$

em que  $s_n$  é um coeficiente complexo, designado amplitude complexa e que permite caracterizar completamente o espectro do sinal.

Relembrando os conceitos já estudados na componente teórica da disciplina de Introdução às Telecomunicações, os espectros de amplitude e de fase podem ser obtidos através de  $s_n$  e  $\phi_n$  ou por intermédio de  $a_n$  e  $b_n$ . Estes por sua vez podem ser obtidos a partir do conjunto de relações:

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) \cos(2\pi n f_0 t) dt \quad (8)$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) \sin(2\pi n f_0 t) dt \quad (9)$$

$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) dt \quad (10)$$

$$s_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \phi_n = \arctg \frac{b_n}{a_n} \quad (11)$$

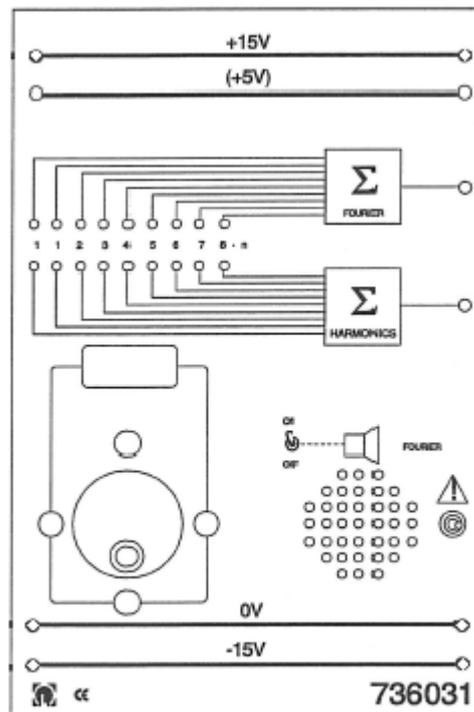
Os coeficientes complexos  $\underline{s}_n$  são calculados através da relação

$$\underline{s}_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) \exp(-j2\pi n f_0 t) dt \quad (12)$$

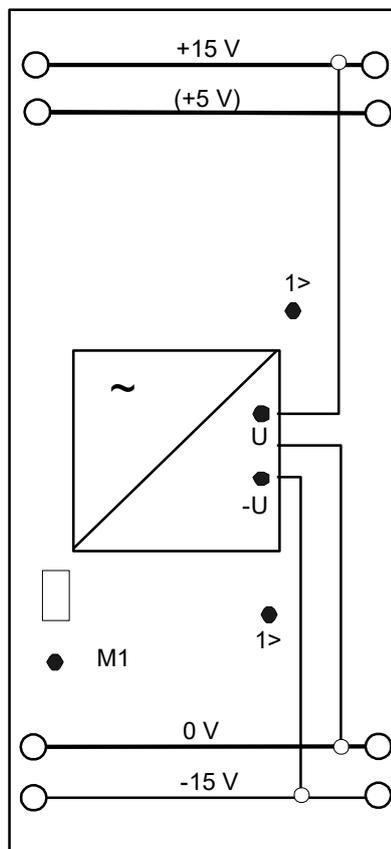
## O Equipamento

**Sintetizador de frequência** – O sintetizador está ilustrado na figura ao lado. Para além da geração de sinais como ondas quadradas, triangulares, diracs e outras, a placa permite obter na saída as harmónicas que compõem cada um dos sinais gerados. Existem duas saídas, representadas por Fourier e Harmonics. Na primeira, obtém-se o sinal periódico composto por todas as harmónicas. A saída Harmonics é composta pelo conjunto de harmónicas ativas que foram seleccionadas.

**Atenção que as placas são alemãs e a nomenclatura é um pouco diferente daquela que usamos na disciplina.** No entanto, na introdução teórica foi adotada a nomenclatura utilizada no equipamento experimental. A correspondência com a nomenclatura usada nas aulas é imediata.



## Fonte de alimentação



## Experiências

Para se fazer as experiências de análise de Fourier tem de fazer as ligações a preto.

As 3 ligações  alimentam o sintetizador. Repare que:

- (a) As harmónicas que compõem o sinal são representadas pela saída Out2;
- (b) o sinal resultante é representado por Out1.

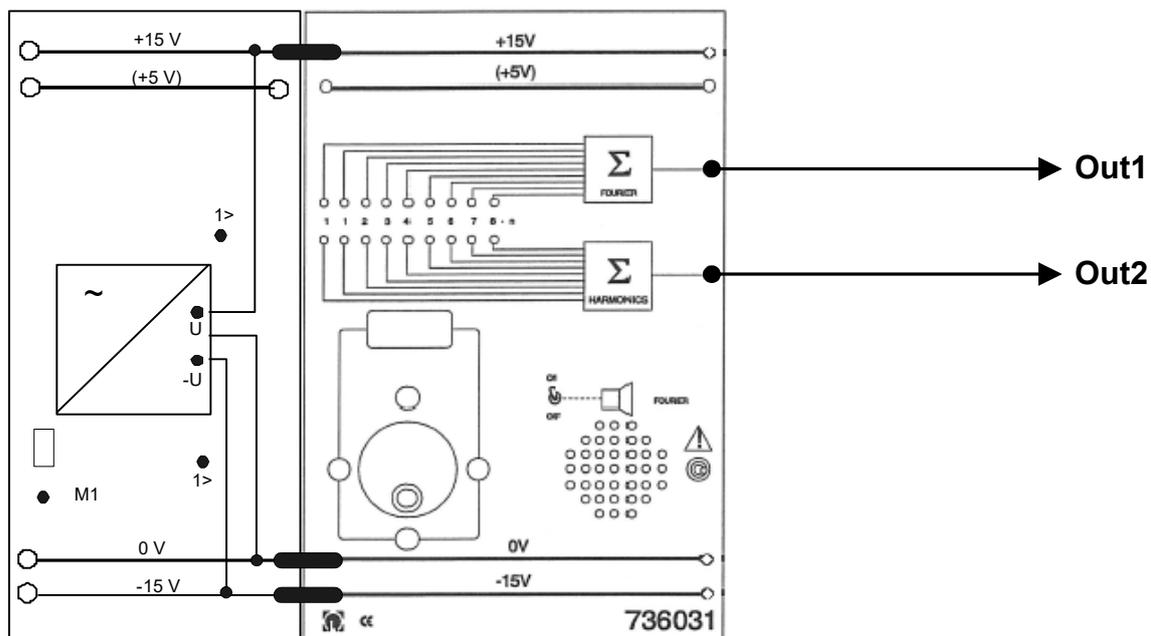


Figura 1 – Ligações a efetuar para a análise de Fourier

O presente trabalho consiste nos seguintes pontos:

**Ponto 1 – Análise de Fourier de uma onda quadrada**

**Ponto 2 – Análise de Fourier de uma onda triangular**

**Ponto 3 – Análise de Fourier de um trem de Diracs**

## Ponto 1 – Estudo de uma onda quadrada e sua representação na frequência. Efeitos da distorção harmônica.

**Objetivo:** Representação em série de Fourier de uma onda quadrada. Análise da influência do peso relativo de cada harmônica e estudo dos efeitos da distorção de amplitude e fase das harmônicas na evolução temporal do sinal.

A representação de Fourier de uma onda quadrada pode ser dada por

$$s(t) = \frac{4A}{\pi} \left[ \sin(2\pi f_0 t) + \frac{1}{3} \sin(2\pi 3 f_0 t) + \frac{1}{5} \sin(2\pi 5 f_0 t) + \frac{1}{7} \sin(2\pi 7 f_0 t) + \dots \right], \quad (13)$$

com o espectro de amplitude descrito por

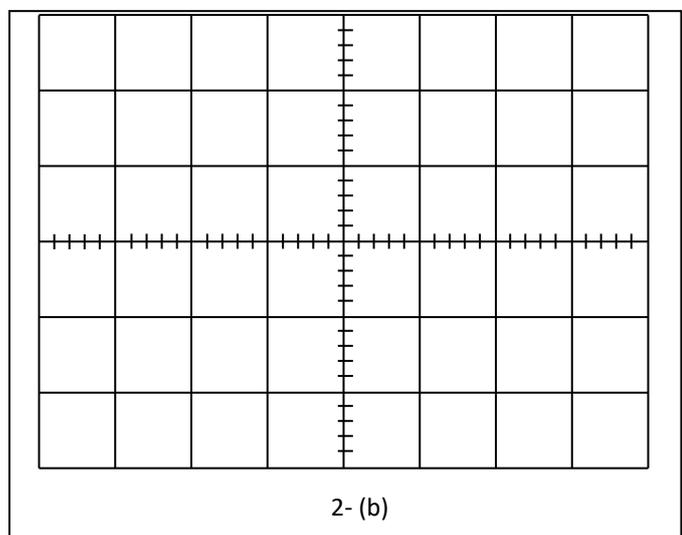
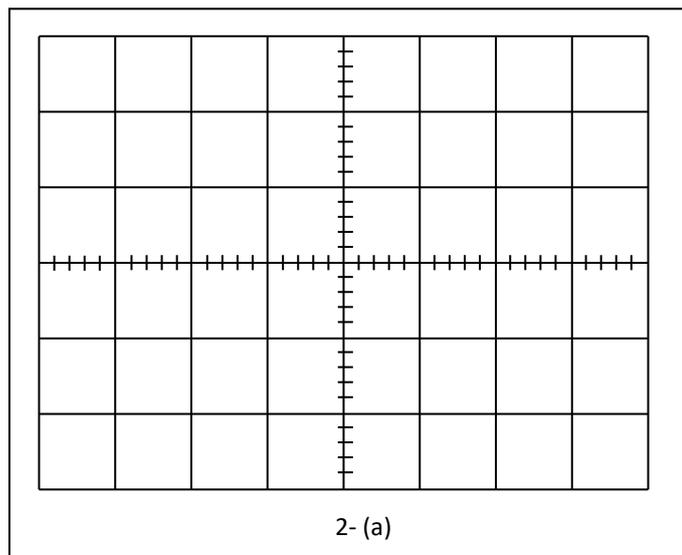
$$s_n = \frac{4A}{\pi n}. \quad (14)$$

### Procedimentos:

1. Alimente os circuitos com a terra (0 V), +15V e –15 V, como está ilustrado na figura 1.
2. Configure o sintetizador com os valores da tabela apresentada abaixo.
3. Elimine todas as harmônicas menos a fundamental.
4. Utilize o osciloscópio para visualizar no canal 1 o sinal de saída OUT1 e no canal 2 a sinal de saída OUT2 2-(a).
5. Visualize no osciloscópio o espectro do sinal OUT1 2-(b). Preencha os valores experimentais da tabela 1. Comente os resultados obtidos.

Teóricos				Medidos	
n	f (Hz)	$\Phi_n$	$S_n$ (V)	f (Hz)	$S_n$ (V)
1	108	90°	5		
2	216		0		
3	324	90°	1.67		
4	432		0		
5	540	90°	1		
6	648		0		
7	756	90°	0.71		
8	864		0		

**Tabela 1**



6. Comente os resultados obtidos.

---



---



---



---



---



---



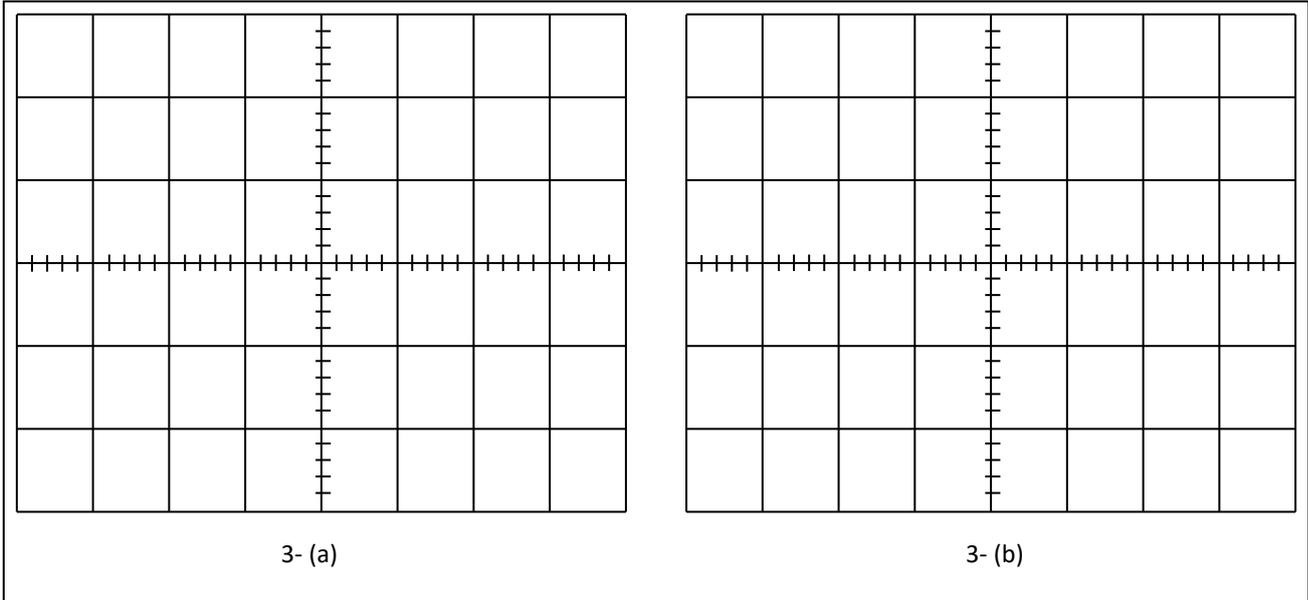
---



---

**Importância das várias harmónicas no sinal.**

- 7. Vão-se eliminar as harmónicas de maior ordem sem alterar as amplitudes das restantes harmónicas. Proceda como indicado abaixo:
- 8. Primeiro elimine a 3ª harmónica. Visualize o sinal resultante e represente-o na figura 3-(a)
- 9. Elimine agora a 7ª harmónica e reponha a 3ª harmónica. Visualize o sinal resultante e represente-o na figura 3-(b)



- 10. Compare as curvas obtidas e comente o efeito das harmónicas de ordem mais elevada na evolução temporal do sinal obtido.

---



---



---



---

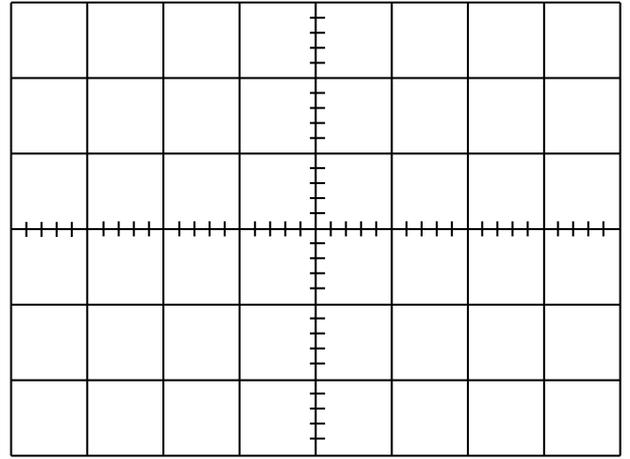


---



---

11. Volte a colocar todas as harmónicas ativas, com as amplitudes iniciais. Pretende-se ver a amplitude das várias harmónicas (na frequência, portanto).
- a. Represente as 3ª e 7ª harmónicas e também a harmónica fundamental., e repare nas suas amplitudes.



3- (c)

- b. Comente o resultado observado.

---



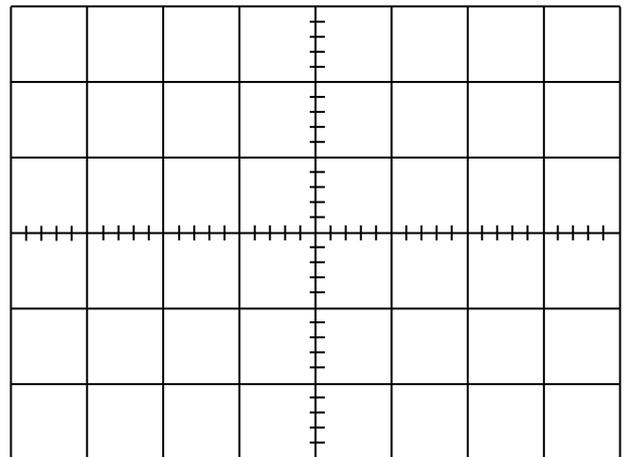
---



---

**Distorção harmónica**

12. Pretende-se ver como alterações de fase nas harmónicas influenciam o andamento do sinal no tempo. Volte a colocar todas as harmónicas ativas, com as amplitudes iniciais. Introduza distorção de fase nas harmónicas: altere a fase da 3ª harmónica para 45°.



3- (d)

- a. Desenhe o andamento temporal do sinal resultante.
- b. Estas alterações têm impacto no espectro de amplitude do sinal? Comente.

---



---



---



---



---

## Ponto 2 – Estudo de uma onda triangular simétrica e sua representação na frequência. Efeitos da distorção harmônica.

**Objetivo:** Representação em série de Fourier de uma onda triangular. Análise da influência do peso relativo de cada harmônica e estudo dos efeitos da distorção de amplitude e fase das harmônicas na evolução temporal do sinal.

A representação de Fourier de uma onda triangular pode ser dada por

$$s(t) = \frac{8A}{\pi^2} \left[ \cos(2\pi f_0 t) + \frac{1}{3^2} \cos(2\pi 3 f_0 t) + \frac{1}{5^2} \cos(2\pi 5 f_0 t) + \frac{1}{7^2} \cos(2\pi 7 f_0 t) + \dots \right], \quad (15)$$

com o espectro de amplitude descrito por

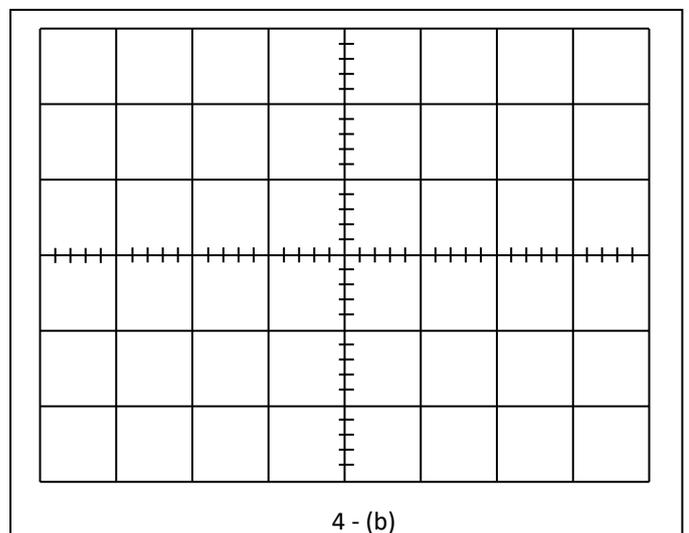
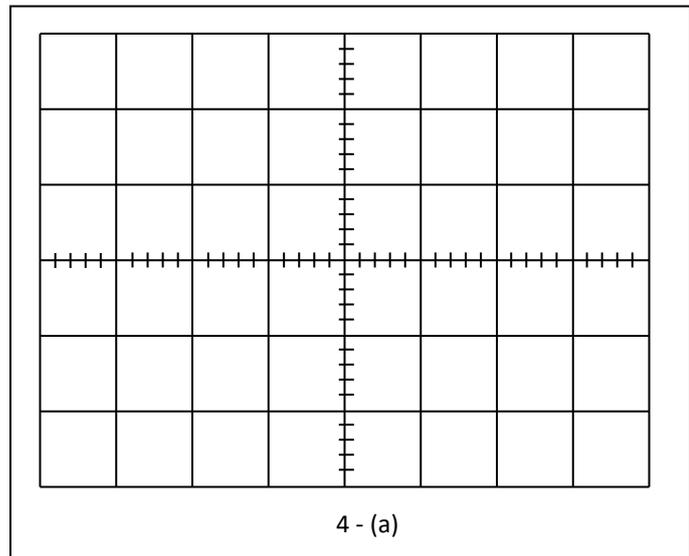
$$S_n = \frac{8A}{(\pi n)^2}. \quad (16)$$

### Procedimentos:

1. Configure o sintetizador com os valores teóricos da tabela 3 apresentada abaixo.
2. Elimine todas as harmônicas menos a fundamental.
3. Utilize o osciloscópio para visualizar no canal 1 o sinal de saída OUT1 e no canal 2 o sinal de saída OUT2.
4. Visualize no osciloscópio o espectro do sinal de saída OUT1 e represente-o na figura 4-(a). Preencha os valores experimentais da tabela 3. Comente os resultados obtidos.
5. Visualize a evolução temporal do sinal OUT1 e represente-o na figura 4-(b).

Teóricos				Medidos	
n	f (Hz)	$\Phi_n$	$S_n$ (V)	f (Hz)	$S_n$ (V)
1	108	0°	7.07		
2	216		0		
3	324	0°	0.79		
4	432		0		
5	540	0°	0.28		
6	648		0		
7	756	0°	0.14		
8	864		0		

Tabela 3



6. Comente os resultados obtidos.

---

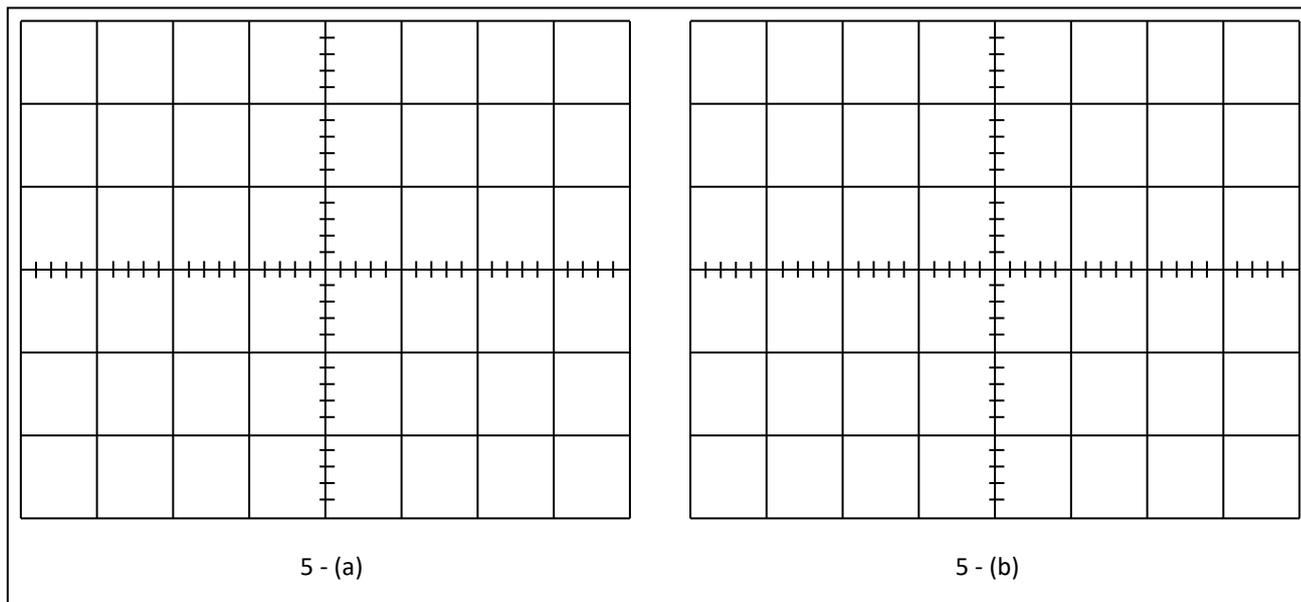
---

---

---

**Distorção de harmónica – amplitude e fase**

- 7. Reduza a amplitude da 3ª harmónica para metade. Visualize o sinal resultante e represente-o na figura 5- (a)
- 8. Reponha a 3ª harmónica e reduza agora para 1/2 a amplitude da 5ª harmónica. Visualize o sinal resultante e represente-o na figura 5-(b)



9. Compare as curvas obtidas e comente o efeito das harmónicas de ordem mais elevada na evolução temporal do sinal obtido.

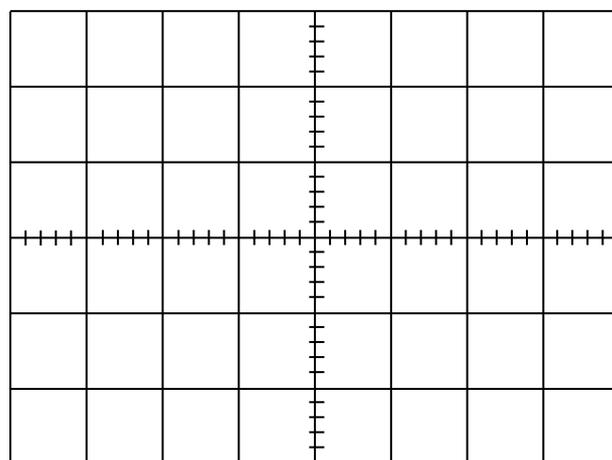
---

---

---

10. Volte a colocar todas as harmónicas ativas, com as amplitudes iniciais. Pretende-se introduzir distorção de fase nas harmónicas. Altere a fase da 3ª harmónica para 90°. Desenhe o andamento temporal do sinal resultante.

11. Comente o resultado observado. Esta ação tem algum impacto no espectro de amplitude do sinal.



---

---

---

### Ponto 3 – Estudo de um trem de Diracs e sua representação na frequência. Efeitos da distorção harmônica.

**Objetivo:** Representação em série de Fourier de um trem de Diracs. Análise da influência do peso relativo de cada harmônica e estudo dos efeitos da distorção de amplitude e fase das harmônicas na evolução temporal do sinal.

Seja uma sequência de Diracs equidistantes no tempo

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_0) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(2\pi n f_0 t). \quad (17)$$

A esta sequência corresponde a transformada de Fourier

$$S(f) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - n/T_0), \quad (18)$$

isto é, um espectro de amplitude com todas as linhas espectrais igualmente espaçadas e com a mesma amplitude.

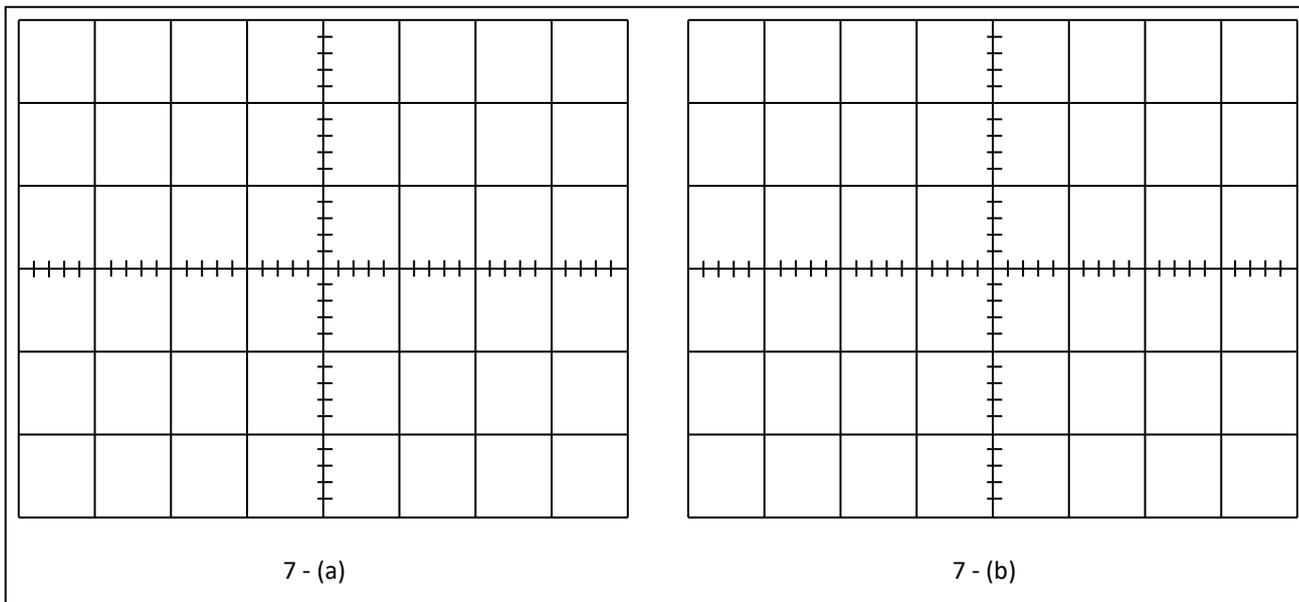
#### Procedimentos:

1. Configure o sintetizador com os valores teóricos da tabela 4 apresentada abaixo.
2. Preencha os valores experimentais na tabela 4.
3. Desenhe na figura 7-(a), o sinal com as 1ª, 2ª e 3ª harmônicas ativas e compare-o com o resultado obtido no ponto 1.

Teóricos				Medidos	
n	f (Hz)	$\Phi_n$	$S_n$ (V)	f (Hz)	$S_n$ (V)
1	108	0°	0.71		
2	216	0°	0.71		
3	324	0°	0.71		
4	432	0°	0.71		
5	540	0°	0.71		
6	648	0°	0.71		
7	756	0°	0.71		
8	864	0°	0.71		

Tabela 4

4. Visualize no osciloscópio o espectro de amplitude do sinal, para a gama de frequências entre 50 Hz e 1 KHz. Represente-o na figura 7-(b).



5. O que observa está de acordo com a previsão teórica? Comente os resultados obtidos.

---

---

---

---

---

---

---