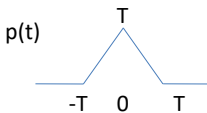




Teste : 90 minutos.

Coloque o número no **canto superior direito** de todas as folhas e o nome na primeira folha, pelo menos. Responda às perguntas individualmente, e de um modo sucinto. Limite primeiramente as respostas aos pontos essenciais, e depois, no final, complete-as. **É permitido utilizar o formulário disponibilizado nas páginas electrónicas da disciplina.**

As alíneas de cada pergunta têm a mesma cotação.

1. [6 val] Considere a transmissão simultânea de dois sinais em banda base, cada um com uma banda de 15KHz.
 - a) Qual a banda necessária quando se recorre a modulações AM, DSB-SC e QAM?
 Resposta:
 AM e DSB-SC: 2 canais, cada um com banda 30kHz => banda total 60kHz
 QAM: 1 canal com 2 sinais => banda total 30kHz
 - b) Qual a banda quando se recorre a uma modulação FM com desvio máximo de frequência $\Delta f=85\text{kHz}$?
 Resposta:
 Banda de um canal: $B_{FM} \approx 2B + 2\Delta f = 200\text{kHz} \Rightarrow$ banda total =400kHz
 - c) Das técnicas referidas em a) e b), quais são compatíveis com um detector não coerente (i.e., um receptor que não conhece a fase da portadora).
 Resposta: O AM (desde que não tenha sobre-modulação) e o FM permitem receptores não coerentes. O DSB-SC e o QAM requerem receptores coerentes.
2. [14 val] Considere um modulador QAM em que o sinal transmitido é $x(t) = x_I(t) \cos(2\pi f_c t) - x_Q(t) \sin(2\pi f_c t)$, com componentes em fase e em quadratura dadas por $x_I(t) = \sum_k a_k r(t - kT)$ e $x_Q(t) = \sum_k b_k r(t - kT)$, com $a_k = \pm A$ e $b_k = \pm A$ associados aos respectivos bits e $r(t) = \text{rect}(t/T)$. Recorre-se a um receptor QAM coerente seguido de filtros adaptados, amostragem e decisão para as componentes em fase e em quadratura.
 - a) Mostre que o sinal é um sinal QPSK e calcule as respectivas fases.
 Resposta:
 $a_k + jb_k = \pm A + j \pm A \Rightarrow |a_k + jb_k| = \sqrt{2}A$ (não depende da mensagem a transmitir); $\varphi_k = \arg(a_k + jb_k) = \pm\pi/4, \pm 3\pi/4 \Rightarrow$ modulação QPSK
 - b) Calcule a PSD, potência média e energia média por bit.
 Resposta:
 $\overline{a_k} = \overline{b_k} = 0; \overline{a_k^2} = \overline{b_k^2} = A^2 \Rightarrow S_{x_I}(f) = S_{x_Q}(f) = A^2 |R(f)|^2 / T = A^2 T \text{sinc}^2(fT)$
 $S_x(f) = (S_{x_I}(f - f_c) + S_{x_I}(f + f_c) + S_{x_Q}(f - f_c) + S_{x_Q}(f + f_c)) / 4$
 $P_{x_I} = P_{x_Q} = A^2 \Rightarrow P_x = (P_{x_I} + P_{x_Q}) / 2 = A^2 \Rightarrow E_b = P_x T_b = P_x T / 2 = A^2 T / 2$
 - c) Mostre que as amostras em fase e quadratura são $y_k^I = a_k T$ e $y_k^Q = b_k T$ e que os respectivos ruídos têm potência $\sigma_{n^I}^2 = \sigma_{n^Q}^2 = N_0 T$.
 Resposta:
 Os filtros adaptados têm resposta impulsiva $h(t) = r(-t)$, pelo que os sinais na saída dos filtros adaptados correspondentes às componentes em fase e quadratura são $y_I(t) = \sum_k a_k p(t - kT)$ e $y_Q(t) = \sum_k b_k p(t - kT)$, com $p(t) = r(t) * h(t)$

 Deste modo, $p(kT) = 0, k \neq 0 \Rightarrow y_k^I = a_k p(0) = a_k T$ e $y_k^Q = b_k p(0) = b_k T$
 $\sigma_{n^I}^2 = \sigma_{n^Q}^2 = N_0 \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df = N_0 \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|^2 dt = N_0 T$
 - d) Mostre que a probabilidade de erro média por bit é $P_b = Q(\sqrt{2E_b/N_0})$.
 Resposta: Para a componente em fase tem-se
 $y_{k^I} = a_k T = \pm AT \Rightarrow P_{b^I} = Q(AT / \sigma_{n^I}) = Q(\sqrt{A^2 T^2 / (N_0 T)}) = Q(\sqrt{2E_b / N_0})$

O mesmo se passa para a componente em quadratura, pelo que

$$P_b = P_{bI} = P_{bQ} = Q(\sqrt{2E_b/N_0})$$

- e) Considere agora o caso em que $a_k = \pm A\sqrt{20/11}$ e $b_k = \pm A\sqrt{2/11}$. Mostre que a probabilidade de erro do bit em fase tem um ganho de 10 relativamente à probabilidade de erro do bit em quadratura.

Resposta: Como $|a_k + jb_k| = \sqrt{2}A$, a potência média e energia média por bit mantém-se. Deste modo,

$$P_{bI} = Q(A\sqrt{20/11}T/\sigma_{nI}) = Q(\sqrt{A^2T^2 20/11/(N_0T)}) = Q(\sqrt{40E_b/11N_0})$$

$$P_{bQ} = Q(A\sqrt{2/11}T/\sigma_{nQ}) = Q(\sqrt{A^2T^2 2/11/(N_0T)}) = Q(\sqrt{4E_b/11N_0})$$

Claramente a componente em quadratura precisa de 10 vezes mais energia para ter a mesma probabilidade de erro.