2. Análise de Fourier

Este capítulo pretende dar uma introdução às séries e transformadas de Fourier como complemento ao livro recomendado da disciplina. Não se transcrevem para aqui os exemplos do livro, pelo que o estudo só ficará completo com a consulta em paralelo do livro. As secções cobertas nesta introdução são as secções 2.1 e 2.2 do livro.

2.0 Conceitos Básicos

2.0.1. *Phasors* e linhas espectrais

Como se viu na Introdução, os cosenos vão ter um papel muito importante no tratamento dos sinais de Telecomunicações. Ora, sempre que se tenta fazer um modelo matemático para descrever qualquer fenómeno físico um dos objectivos é que a notação matemática seja o mais compacta possível para se poder manipular facilmente e se terem expressões curtas.

Uma forma de se compactar bastante as expressões de senos e cosenos é usar o cálculo complexo. Não só em Telecomunicações, mas em toda a área de Engenharia Electrotécnica em geral, os senos e os cosenos serão muito importantes, e por consequência, todo o cálculo complexo. Uma forma de compactar as expressões com senos e cosenos é usar a *fórmula de Euler*. É possível representar os senos e cosenos através da exponencial complexa usando a expressão

$$e^{\pm j\phi} = \cos\phi \pm jsin\phi$$

A exponencial complexa anterior designa-se por ***phasor***, pois representa um vector a rodar no espaço complexo em que os eixos são a parte imaginária e a parte real. Para o caso concreto das Telecomunicações, a expressão geral de uma onda portadora com amplitude máxima, A, frequência, f_0, e fase, θ, é dada pela expressão

$$v(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta)$$

Se dissermos que

$$\phi = 2\pi f_0 t + \theta$$

podemos escrever qualquer sinusóide de interesse para as Telecomunicações como a parte real de uma exponencial complexa

$$\begin{aligned} A\cos(2\pi f_0 t + \theta) &= A\,\mathrm{Re}\left[e^{j(2\pi f_0 t + \theta)}\right] \\ &= \mathrm{Re}\left[Ae^{j\theta}e^{j2\pi f_0 t}\right] \end{aligned}$$

O *phasor* tem comprimento A, roda no sentido oposto ao dos ponteiros do relógio a uma frequência de f_0 rotações por segundo, e no tempo $t=0$ faz um ângulo de θ relativamente ao eixo real positivo. A projecção do *phasor* no eixo real é igual à sinusóide da segunda equação desta secção.

Observe-se que apenas três parâmetros especificam completamente o *phasor*:

- amplitude,
- ângulo de fase e
- frequência de rotação.

Para descrever este mesmo *phasor* no domínio da frequência, temos de associar a correspondente amplitude e fase com a frequência dele, f_0. Assim, a descrição no domínio da frequência do *phasor* será constituída pelos dois gráficos com linhas espectrais mostrados na parte direita da figura 2.1. (espectro de amplitude e espectro de fase em função da frequência). Quando comparamos esta figura com a figura 1.6 da Introdução, que descreve em frequência uma frequência pura vimos que estamos perante representações equivalentes.

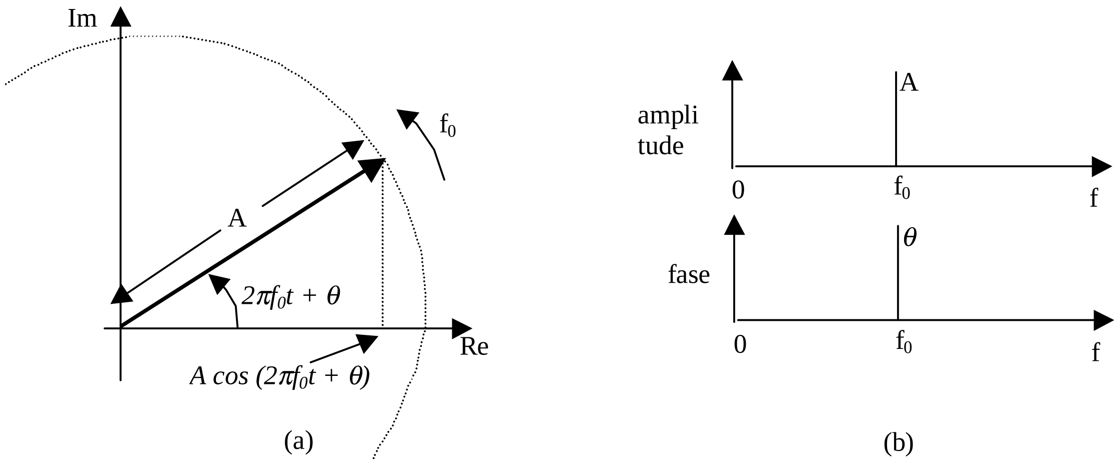

Figura 2.1.
Representações de $v(t) = cos\ (2\pi f_0 t + \theta)$: (a) Diagrama do *phasor*; (b) linhas espectrais.

2.0.2. A importância da representação de sinais em senos e cosenos

Na Introdução ficou uma ideia ousada relativamente à interpretação de um sinal de voz. Disse-se na altura que poderíamos encará-lo como um limite de um grande número de frequências puras e, portanto, como um somatório, ou um integral, no tempo de funções sinusóidais. Que vantagens advirão de se representar o sinal de voz por funções sinusóidais?

Existem duas motivações importantes para o uso de senos e cosenos como base para a representação de sinais. A primeira prende-se com o facto de que quando se excita um sistema linear e invariante no tempo (LIT) com um sinal, a amplitude e fase do sinal sofrem alterações, mas não a sua frequência. Um exemplo é a passagem de um sinal por um filtro, ou por um meio de transmissão. Assim, ao se representar um sinal qualquer por componentes senos e cosenos (que têm cada um frequências únicas, ou tons únicos), as várias frequências únicas de cada seno e cada coseno não são alteradas por esses sistemas, mas sim as suas fases e amplitudes. Pode-se então estudar as alterações que um sistema LIT provoca num sinal pela sobreposição das alterações que sofrem cada seno e cada coseno componentes desse sinal e depois somar tudo. Cada um dos tratamentos de frequências puras é muito mais simples do que o conjunto.

A segunda, tão importante como a primeira, é que com os senos e os cosenos a passagem para a descrição espectral é relativamente simples. Como já deve ter ficado claro na Introdução, muitas vezes é mais simples pensar nos sinais e nos sistemas do ponto de vista espectral do que do ponto de vista do tempo. Nas descrições em frequência vê-se perfeitamente em que frequências os sinais têm mais potência ou energia e que alterações um sistema provoca ao sinal.

A formulação matemática que se usa são as **séries** e as **transformadas de Fourier**. As séries de Fourier vão-nos permitir representar sinais periódicos como um somatório infinito de funções sinusóidais. Uma onda portadora é um bom exemplo de um sinal periódico. As transformadas de Fourier vão-nos permitir representar sinais não periódicos.

De um ponto de vista matemático, ter dois mecanismos para representar funções, com a diferença única de elas serem periódicas ou não, é um pouco deselegante e um fracasso em termos do modelo ser compacto e único. Definiu-se então uma função especial, genérica, que não tem representação no mundo físico, para permitir que as **transformadas de Fourier** possam ser usadas para representar sinais periódicos e não-periódicos. Essa função chama-se **função delta dirac** e já foi vista na Introdução com o **impulso unitário**.

2.1. Representação de Funções

O objectivo da análise de Fourier é conseguir representar uma função na variável tempo usando outra base que não os eixos cartesianos. A nova base é constituída por funções seno e coseno.

Uma primeira abordagem a este assunto foi focada na Introdução e consistiu em descrever precisamente o processo inverso. Partindo-se do conhecimento que um coseno gera uma frequência pura e uma linha com uma certa amplitude no espectro de amplitude, podia-se pensar que um espectro contínuo como o da figura 1.9 pudesse ser o limite da existência de infinitas frequências puras e o sinal no tempo seria assim uma soma de infinitos componentes cosenos em que cada componente teria o peso do valor da amplitude do espectro de amplitude. O espectro de fase iria determinar o valor da fase de cada coseno.

Outra maneira de tentar perceber o problema da representação é o que acontece com a televisão a cores. Cada ponto do écran é representado pela intensidade de vermelho, verde e azul que a sua cor tem. Neste caso as bases não são infinitas, são três, nem são funções, mas de qualquer modo uma certa cor é transformada em três pesos com este processo, como mostra a seguinte expressão

$$cor = p_r\, vermelho + p_g\, verde + p_b\, azul \qquad (1)$$

se soubermos os três pesos, p_r, p_g e p_b saberemos a cor. Se soubermos a cor poderemos determinar os pesos.

De um modo simplista, a grande diferença quando as bases são funções é que podemos pensar nelas como funções de outra variável, a frequência, e os pesos dão o valor da função nesse novo espaço de variáveis.

Vai-se ver primeiro o caso de funções periódicas, que têm um espectro discreto.

2.2. Séries de Fourier

Seja $g_p(t)$ uma função periódica com o período T_0. Assim, tem-se que $g_p(t) = g_p(t+nT_0)$ com n inteiro. A representação desta função usando uma soma infinita de senos e cosenos, a série de Fourier, tem a representação genérica mostrada na Eq. 2. Antes de se ver um exemplo ilustrativo vai-se explicar o significado dos vários termos que aparecem na equação. Os coeficientes a_n e b_n representam as amplitudes (os pesos) não conhecidas dos termos seno e coseno. Para cada função em particular é preciso achar os valores dessas amplitudes, tal como para o caso da televisão a cores. A quantidade n/T_0 representa a *harmónica* de ordem n da *frequência fundamental* (ou primeira harmónica) $f_0=1/T_0$. Cada seno e coseno da Eq. 2 tem o nome de *função base*. Vê-se já outra diferença relativamente ao exemplo da televisão a cores. Se no caso da televisão o vermelho, o verde e o azul eram cores constantes e fixas, as bases neste caso começam com a frequência da primeira harmónica, $f_0=1/T_0$, em que T_0 é o período da função periódica, e vão tomando valores múltiplos desses, n/T_0 (com n = 2, 3, 4 …). Assim, para funções periódicas com períodos diferentes vão existir funções base que oscilam (pois são senos e cosenos) com frequências diferentes

$$g_p(t) = a_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right) + b_n sin\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right)\right] \qquad (2)$$

As funções base podem formar, ou não, um *conjunto ortogonal*. Entende-se por isto que o seu produto cruzado é nulo. Ora, as funções seno e coseno formam um conjunto ortogonal no intervalo do seu período, T_0. Assim, o seu produto cruzado é nulo como mostram as três equações seguintes. A vantagem imediata desta propriedade é que nos vai simplificar grandemente os cálculos na determinação dos coeficientes dos senos e cosenos.

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos\left(\frac{2\pi mt}{T_0}\right)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right)dt = \begin{cases} T_0/2 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases} \qquad (3)$$

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos\left(\frac{2\pi mt}{T_0}\right) sin\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right) dt = 0 \qquad \textit{para todo o m e n} \tag{4}$$

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} sin\left(\frac{2\pi mt}{T_0}\right) sin\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right) dt = \begin{cases} T_0/2 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases} \tag{5}$$

A tarefa então, é saber como calcular os coeficientes correspondentes a um dado sinal. Para se calcular o coeficiente a_0, integram-se ambos os lados da Eq. 2 no período. O integral de um seno, ou de um coseno, no período completo é nulo, pelo que todos os termos do somatório se anulam. a_0 tem, assim, o valor dado pela Eq. 6. Como se pode ver por esta equação, a_0 não é mais do que o *valor médio* do sinal periódico $g_p(t)$ no período T_0.

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} g_p(t) dt \tag{6}$$

Para determinar os coeficientes a_n, multiplicam-se ambos os lados da Eq. 2 por $cos(2\pi nt/T_0)$ e integram-se no período, tal como para a_0, entre o intervalo $-T_0/2$ e $T_0/2$. Usando as Eq. 3 e 4 muitos dos termos ficam nulos, e tem-se para a_n o seguinte valor.

$$a_n = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} g_p(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right) dt \qquad n = 1,2,\ldots \tag{7}$$

De um modo idêntico se calcula o valor de b_n. Multiplica-se agora pelo seno e depois integra-se e usa-se o facto das funções bases serem um conjunto ortogonal no espaço de integração que é igual ao período.

$$b_n = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} g_p(t) sin\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right) dt \qquad n = 1,2,\ldots \tag{8}$$

Portanto, se tivermos a função $g_p(t)$ usamos as expressões 6, 7 e 8 e calculamos os coeficientes.

Para aplicar a representação em série de Fourier é suficiente que dentro do intervalo de $-T_0/2$ e $T_0/2$ a função $g_p(t)$ satisfaça as seguintes condições:

1. A função $g_p(t)$ toma valores únicos para t.
2. A função $g_p(t)$ tem um número finito de discontinuidades
3. A função $g_p(t)$ tem um número finito de máximos e de mínimos
4. A função $g_p(t)$ é absolutamente integrável, isto é

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \left| g_p(t) \right| dt < \infty$$

em que é assumido que $g_p(t)$ possa ser complexa

Estas condições têm o nome de condições de Dirichlet. Elas são satisfeitas pelos sinais periódicos normalmente usados em sistemas de telecomunicações.

Exemplo 1

Vai-se ver neste exemplo um caso concreto de representação de um trem de pulsos periódico pela série de Fourier. Imagine-se o trem de pulsos representado na figura 2.1., em que a amplitude dos pulsos é A, e que o período é T. Cada pulso tem a duração T_0.

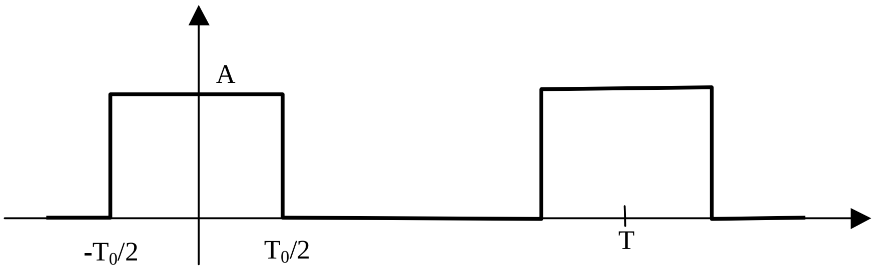

Figura2.1.
Trem de pulsos rectangulares

Concretizando agora os valores assuma-se que A vale 20, T vale 0.5 e T_0 vale 0,125. O valor de a_0 é fácil de calcular e vale 5. Este é o valor médio da função. A figura 2.2. mostra a função e duas aproximações a ela: Uma com apenas a_0 e outra com a_0 e com os componentes da frequência fundamental. Como se pode ver, a aproximação é bastante fraca com tão poucos componentes.

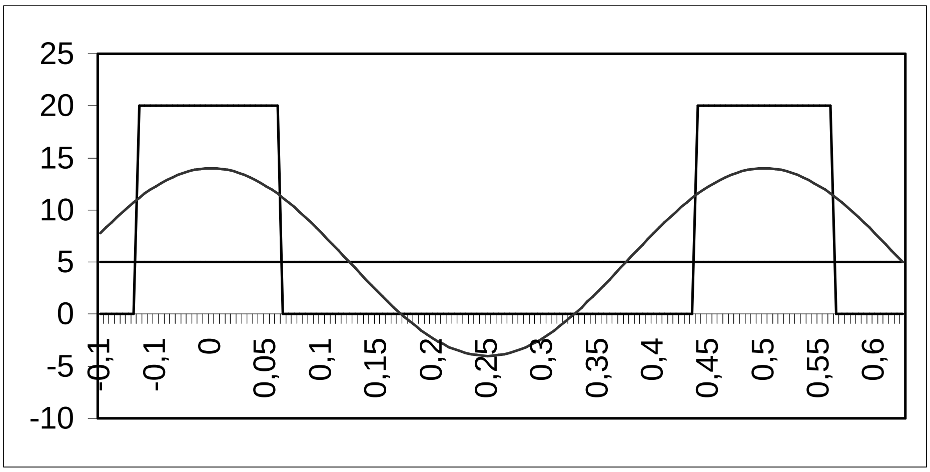

Figura 2.2.
Aproximação ao trem de pulsos com o valor médio e com o valor médio e a frequência fundamental.

A figura 2.3. mostra já a representação do trem de pulsos usando para além do valor médio e da frequência fundamental, mais três e cinco harmónicas. Como se pode ver, a forma de onda da série vai-se aproximando cada vez mais à forma dos pulsos. As harmónicas de ordem elevada vão tendo amplitudes cada vez menores e vão sendo responsáveis principalmente por "fazerem" os cantos da função original. De um ponto de vista informal pode-se já constatar que estes "cantos" têm componentes de muito alta frequência.

A figura 2.4. tem a representação do trem de pulsos usando oito harmónicas e vinte e seis harmónicas. Como se pode ver, com oito harmónicas já se percebe bastante bem que é um trem de pulsos e com vinte e seis harmónicas a representação já é bastante perfeita. No entanto, nos pontos de discontinuidade a aproximação por sinusóides tem sempre umas oscilações, que vão sendo sempre mais pequenas, mas que só deixam de existir se considerarmos um número infinito de harmónicas. Isso é devido ao uso de funções sinusóidais para fazer a representação e é conhecido como o *fenómeno de Gibbs*.

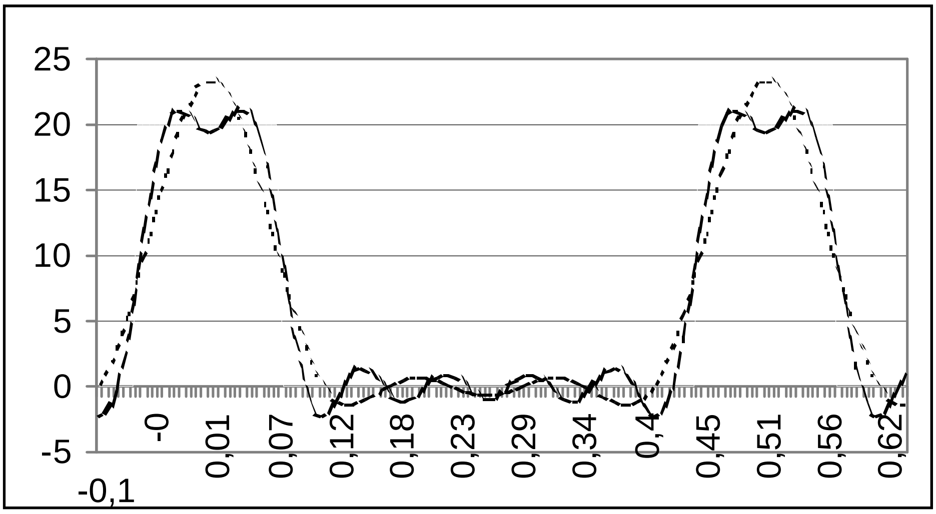

Figura 2.3.
Aproximação ao trem de pulsos com quatro e seis harmónicas.

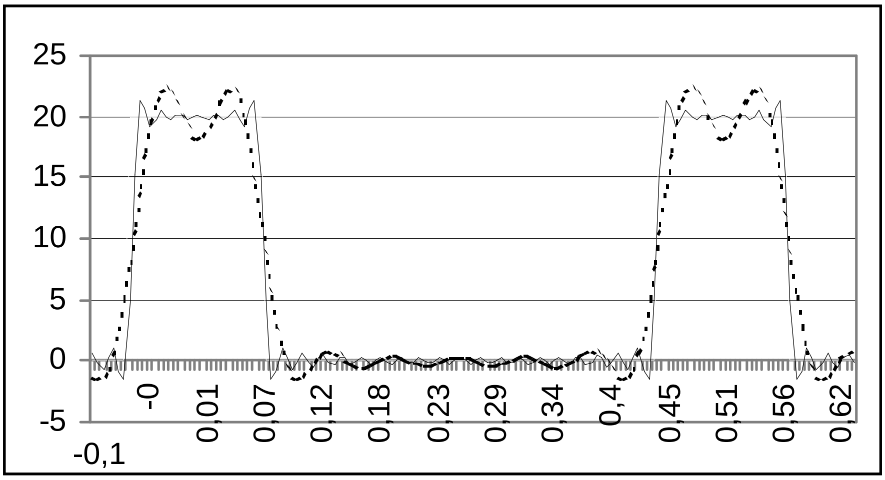

Figura 2.4.
Aproximação ao trem de pulsos com oito e vinte e seis harmónicas.

Para se ter uma melhor percepção das amplitudes das funções base sinusóidais das diversas frequências das harmónicas, a figura seguinte mostra o espectro de amplitude até à vigésima sexta harmónica. Como se pode ver, as amplitudes das harmónicas superiores vão sendo cada vez mais pequenas. O propósito é “encher” apenas os pontos de discontinuidade do sinal. Algumas das amplitudes são mesmo nulas, significando que o sinal não tem componentes de frequência dessa harmónica.

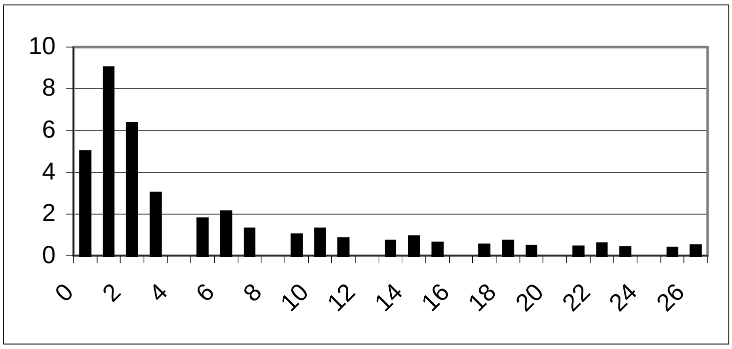

Figura 2.5.
Espectro de amplitude de um trem de pulsos até à vigésima sexta harmónica.

A Eq. 2 é perfeitamente aceitável para representar uma função $g_p(t)$ periódica. No entanto, é possível chegar-se a uma forma mais compacta, simples e elegante usando exponenciais complexas. Para se chegar a ela tem de se atender às seguintes relações mostradas nas Eq. 9 e 10, que derivam da *fórmula de Euler* (ver página 1).

$$\cos(a) = \frac{1}{2}\left[\exp(ja) + \exp(-ja)\right] \qquad (9)$$

$$sin(a) = \frac{1}{2j}\left[\exp(ja) - \exp(-ja)\right] \qquad (10)$$

substituindo os cosenos e os senos da Eq. 2 e pondo em evidência exponenciais com a mesma potência, tem-se a seguinte expressão

$$g_p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(a_n - jb_n)\exp\left(\frac{j2\pi nt}{T_0}\right) + (a_n + jb_n)\exp\left(-\frac{j2\pi nt}{T_0}\right)\right] \qquad (11)$$

as duas parcelas da soma dentro dos parêntesis rectos são conjugadas uma da outra. Note-se também a seguinte relação

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[(a_n + jb_n)\exp\left(-\frac{j2\pi nt}{T_0}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{-1}\left[(a_n - jb_n)\exp\left(\frac{j2\pi nt}{T_0}\right)\right] \qquad (12)$$

Se definirmos outro coeficiente, c_n, relacionado com a_n e b_n do seguinte modo

$$c_n = \begin{cases} a_n - jb_n, & n > 0 \\ a_0 & n = 0 \\ a_n + jb_n, & n < 0 \end{cases} \qquad (13)$$

então podemos simplificar a Eq. 11 para a seguinte forma

$$g_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(\frac{j2\pi nt}{T_0}\right) \qquad (14)$$

em que

$$c_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} g_p(t)\exp\left(-\frac{j2\pi nt}{T_0}\right)dt \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (15)$$

A série da Eq. 14 é conhecida como a ***série de Fourier exponencial complexa***. O c_n é chamado de ***coeficiente complexo de Fourier***. A Eq. 15 diz que, dado um sinal periódico $g_p(t)$, podemos determinar o conjunto completo de coeficientes complexos de Fourier. Por outro lado, a Eq. 14 diz que dado um conjunto de coeficientes complexos podemos reconstruir exactamente o sinal periódico original.

De acordo com esta representação um sinal periódico contém todas as frequências (tanto positivas como negativas) que estão harmonicamente relacionadas com a frequência fundamental. A presença de frequências negativas é simplesmente um resultado de querermos ter um modelo matemático compacto como o definido pela Eq. 14. Este modelo requer também o uso de funções base exponenciais complexas, a $exp(j2\pi nt/T_0)$, o que não tem também qualquer significado físico.

A razão para se usar componentes de frequência negativas e funções de base complexa é meramente para ter uma descrição matemática compacta de um sinal periódico, o que vai trazer vantagem tanto no tratamento teórico como prático.

Espectro Discreto

A representação de um sinal periódico pela série de Fourier é equivalente à decomposição desse sinal nos seus vários componentes harmónicos – o somatório das várias harmónicas. Assim, usando a série de Fourier exponencial complexa nós vimos que um sinal periódico $g_p(t)$ com período T_0 tem componentes de frequência 0, $\pm f_0$, $\pm 2f_0$, $\pm 3f_0$, … , e assim por diante, em que $f_0 = 1/T_0$ é a frequência fundamental. Isto é, **enquanto o sinal $g_p(t)$ existe no domínio do tempo, podemos dizer que a sua descrição no domínio da frequência consiste nos componentes de frequência 0, $\pm f_0$, $\pm 2f_0$, $\pm 3f_0$, …, chamado de *espectro***.

Se especificarmos o sinal periódico $g_p(t)$, podemos determinar o seu espectro; inversamente, se especificarmos o espectro, podemos determinar o sinal correspondente. Isto significa que um sinal periódico $g_p(t)$ pode ser especificado em dois modos equivalentes: (1) a representação no domínio de tempo em que $g_p(t)$ é definido como uma função do tempo; e (2) a representação no domínio da frequência em que o sinal é definido em termos do seu espectro. Embora as duas representações sejam aspectos diferentes de um certo fenómeno, não são independentes um do outro, mas sim relacionados, tal como a teoria de Fourier o mostra.

Antes de se analisar o coeficiente de Fourier c_n, vai-se relembrar dois tipos de representação de pontos num espaço cartesiano. A figura 2.6. mostra um ponto P no espaço complexo. O ponto P pode ser representado na sua forma escalar como $a+jb$, ou na sua forma polar como $c\ exp\ [j\ \theta]$. Atendendo a que

$$exp\ (\pm j\theta) = cos\ \theta \pm j\ sin\ \theta$$

tem-se que

$$c\ cos\theta = a \qquad \text{e} \qquad c\ sen\theta\ = b,$$

e estamos, de facto, em presença de duas representações equivalentes para o ponto P.

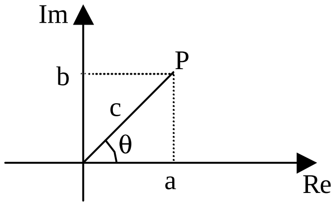

Figura 2.6.
Representação de um ponto *P* no espaço complexo.

De um modo geral, o coeficiente de Fourier c_n é um número complexo. Pode ser então expresso na seguinte forma polar

$$c_n = |c_n| \exp[j \arg(c_n)] \tag{16}$$

O termo $|c_n|$ define a amplitude do coeficiente harmónico de ordem n do sinal periódico $g_p(t)$, pelo que a representação de $|c_n|$ em função da frequência é o _espectro discreto de amplitude_ do sinal. A representação de $arg(c_n)$ em função da frequência é o _espectro discreto de fase_ do sinal. Refere-se o espectro como _espectro discreto_ porque ambas a amplitude e a fase de c_n têm valores diferentes de zero para apenas frequências discretas que são múltiplos inteiros (tanto positivos como negativos) da frequência fundamental (n = 0, ±1, ±2, ±3, …).

Para uma função periódica $g_p(t)$ que tem valores reais, vê-se da definição de coeficiente de Fourier c_n dada pela Eq. 15 que

$$c_{-n} = c_n^* \tag{17}$$

em que c_n^* é o complexo conjugado de c_n. Tem-se, então

$$|c_{-n}| = |c_n| \tag{18}$$

e

$$\arg(c_{-n}) = -\arg(c_n) \tag{19}$$

Isto é, o espectro de amplitude de um sinal periódico de valores reais é *simétrico* (uma função par de *n*) e o espectro de fase é *assimétrico* (uma função ímpar de *n*) relativamente ao eixo vertical que passa pela origem.

Deve ser visto o exemplo 1 do livro recomendado.

2.3. Transformadas de Fourier

Na secção anterior usaram-se séries de Fourier para representar sinais periódicos. Vai-se desenvolver nesta secção uma representação idêntica para representar sinais *g(t)* que sejam não periódicos. Para esta representação também se usarão funções exponenciais complexas.

Para se fazer isto vai-se construir uma função periódica $g_p(t)$ de período T_0, de tal modo que *g(t)* define um ciclo desta nova função periódica, como está ilustrado na figura 2.7. No limite vai-se fazer com que o período T_0 seja infinitamente grande para que se possa escrever

$$g(t) = \lim_{T_0 \to \infty} g_p(t) \tag{20}$$

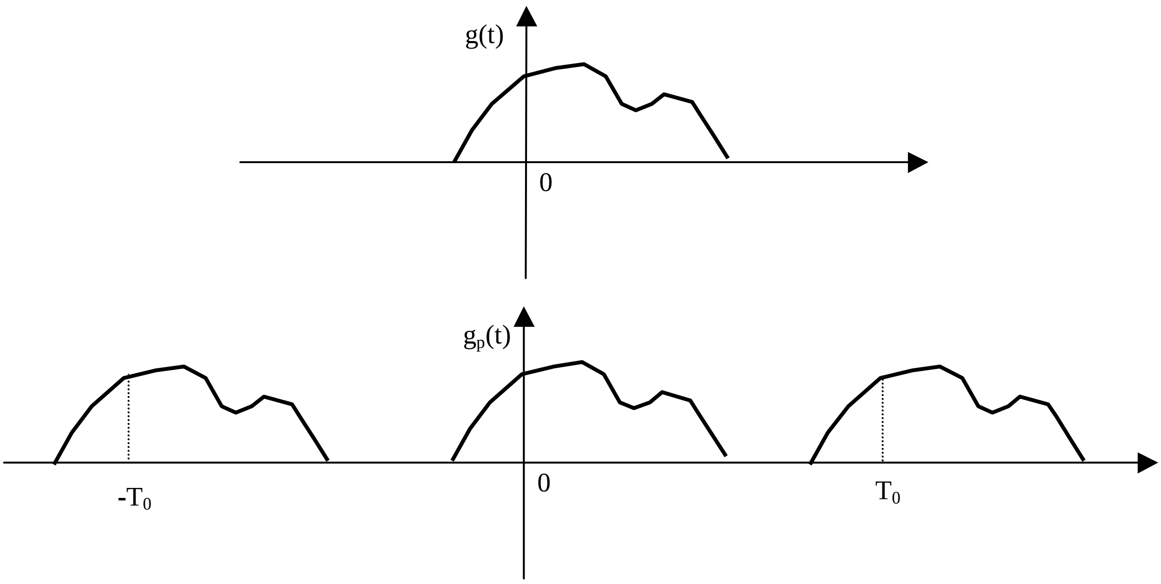

Figura 2.7.
Construção de uma função periódica a partir de uma função arbitrária no tempo

Representando a função periódica $g_p(t)$ em termos da série de Fourier exponencial complexa vista atrás, tem-se

$$g_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(\frac{j2\pi nt}{T_0}\right) \tag{21}$$

em que

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} g_p(t) \exp\left(-\frac{j2\pi nt}{T_0}\right) dt \tag{22}$$

Definindo agora

$$\Delta f = \frac{1}{T_0}$$

$$f_n = \frac{n}{T_0}$$

$$G(f_n) = c_n T_0$$

e fazendo a troca de notações na representação da série de Fourier das Eq. 21 e 22 têm-se as seguintes relações para o intervalo $-T_0/2 \le t \le T_0/2$,

$$g_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(f_n)\exp(j2\pi f_n t)\Delta f \tag{23}$$

em que

$$G(f_n) = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} g_p(t)\exp(-j2\pi f_n t)dt \tag{24}$$

Suponha-se agora que o período T_0 tende para infinito, ou de um modo equivalente, que o seu inverso Δf se aproxime de zero. Então, no limite, a frequência discreta f_n tende para a frequência contínua f, e a soma discreta da Eq. 23 tende para um integral definindo a área abaixo da função contínua de frequência f, que é $G(f)\ exp(j2\pi ft)$. Portanto, no limite as Eq. 23 e 24 tornam-se, respectivamente

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)\exp(j2\pi ft)df \tag{25}$$

em que

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\exp(-j2\pi ft)dt \tag{26}$$

Conseguiu-se, assim, o objectivo de representar um sinal arbitrário $g(t)$ em termos de funções exponenciais no tempo no intervalo total de $-\infty$ a ∞. Notar que nas Eq. 25 e 26 se usaram letras minúsculas para representar a função do tempo e letras maiúsculas para representar a correspondente função na frequência.

A Eq. 26 diz que, dada uma função do tempo, $g(t)$, podemos determinar uma nova função $G(f)$ de variável f de frequência. A Eq. 25 diz que, dada esta nova, ou transformada, função $G(f)$, podemos recuperar a função do tempo original $g(t)$. Assim, como de $g(t)$ nós podemos definir a função $G(f)$ e de $G(f)$ nós podemos reconstruir $g(t)$, a função do tempo é também especificada por $G(f)$. Quer dizer, não existe independência entre as duas representações.

A função $G(f)$ pode ser vista como uma versão transformada de $g(t)$ e é chamada de ***transformada de Fourier*** de $g(t)$. A função de tempo $g(t)$ é referida, do mesmo modo, por ***transformada inversa de Fourier*** de $G(f)$. As funções $g(t)$ e $G(f)$ constituem um *par de transformadas de Fourier*.

Condições de Dirichlet

Para que um sinal $g(t)$ tenha transformada de Fourier é suficiente que $g(t)$ satisfaça as condições de Dirichlet:

1. A função $g(t)$ tem valores únicos, um número finito de máximos e mínimos e um número finito de discontinuidades em qualquer intervalo finito de tempo
2. A função $g(t)$ é absolutamente integrável, isto é

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|dt < \infty$$

As condições de Dirichlet não são estritamente necessárias, mas suficientes para haver transformadas de Fourier. Estas condições incluem todos os sinais de energia, para os quais se tem

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt < \infty$$

Para as duas condições listadas acima, assume-se que o sinal *g(t)* é complexo.

Notações

As fórmulas para a transformada de Fourier e para a transformada inversa de Fourier apresentadas nas Eq. 25 e 26 estão escritas em termos do tempo *t* e da frequência *f*, com *t* medido em *segundos* (s) e *f* medido em *Hertz* (Hz). A frequência *f* está relacionada com a <u>*frequência angular*</u> ω como $\omega=2\pi f$, a qual é medida em *radianos por segundo* (rad/s).

Podia-se simplificar as expressões, principalmente nos expoentes das exponenciais, se usássemos ω em vez de *f*. O factor 2π desapareceria. Porém, é preferível usar-se *f* em vez de ω por duas razões: Primeiro, tem-se uma simetria matemática das Eq. 25 e 26 relativamente uma à outra. Segundo, o conteúdo de frequência de sinais de telecomunicações (por exemplo, voz, sinais de vídeo) são normalmente expressos em Hertz e não em radianos por segundo.

Uma simplificação de notação que é muito conveniente para as relações de transformada das Eq. 25 e 26 é

$$G(f) = F[g(t)]$$

$$g(t) = F^{-1}[G(f)]$$

Outra simplificação de notação conveniente para o par de transformadas de Fourier, representado por g(t) e G(f) é

$$g(t) \rightleftharpoons G(f)$$

Espectro

Pelo uso da transformação de Fourier, um sinal de energia *g(t)* é representado pela transformada de Fourier *G(f)*, a qual é uma função da variável de frequência *f*. A representação da transformada de Fourier *G(f)* em função da frequência *f* é chamada de <u>*espectro*</u> do sinal *g(t)*. O espectro é contínuo no sentido de que está definido para todas as frequências. De um modo geral, a transformada de Fourier *G(f)* é uma função complexa da frequência *f*. Pode-se, então, representá-la na forma

$$G(f) = |G(f)| \exp[j\theta(f)] \tag{27}$$

em que |*G(f)*| é chamado de <u>*espectro de amplitude*</u> de *g(t)*, e $\theta(f)$ é chamado de <u>*espectro de fase*</u> de *g(t)*.

Para o caso especial de uma função *g(t)* de valores reais, tem-se

$$G(f) = G^*(-f) \tag{28}$$

Então, significa que se *g(t)* é uma função do tempo *t* com valores reais, se tem

$$|G(-f)| = |G(f)| \tag{29}$$

e

$$\theta(-f) = -\theta(f) \tag{30}$$

Pode, então, fazer-se as seguintes afirmações acerca do espectro de um sinal de valores reais:

1. O espectro de amplitude de um sinal é uma função par da frequência; isto é, o espectro de amplitude é *simétrico* relativamente ao eixo vertical.
2. O espectro de fase de um sinal é uma função ímpar da frequência; isto é, o espectro de amplitude é *assimétrico* relativamente ao eixo vertical.

Estas afirmações são muitas vezes resumidas numa só dizendo-se que o espectro de um sinal de valores reais exibe *simetria conjugada*.

Devem ser vistos os exemplos 2 e 3 do livro recomendado.