FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Departamento de Engenharia Electrotécnica
Secção de Telecomunicações

Introdução às Telecomunicações
Mestrado Integrado em Engenharia Electrotécnica
Rui Dinis
6 de Novembro de 2023
1º teste
Semestre Ímpar

Teste : 90 minutos.

Coloque o número no **canto superior direito** de todas as folhas e o nome na primeira folha, pelo menos. Responda às perguntas individualmente, e de um modo sucinto. Limite primeiramente as respostas aos pontos essenciais, e depois, no final, complete-as. **É permitido utilizar o formulário disponibilizado nas páginas electrónicas da disciplina.**

1. [8 val] Considere o sinal x(t)=sinc(1000t).
   a. Calcule a sua transformada de Fourier e energia.
   Resposta:
   $X(f) = rect(f/1000)/1000 \Rightarrow E_x = \int_{-\infty}^{+\infty}|X(f)|^2 df = 1/1000$
   b. Calcule a banda total de x(t), a banda a 3dB e a banda correspondente a 90% da energia.
   Resposta: $B_{total}=B_{3dB}=500$Hz; como X(f) é rectangular $B_{90\%}=0.9B_{total}=450$Hz.
   c. Considere que x(t) é submetido a um filtro com resposta em frequência H(f), dando origem ao sinal y(t). Existe algum filtro H(f) em que o sinal y(t) fica com uma banda total maior que x(t)? E relativamente à banda correspondente a 90% da energia? Justifique.
   Resposta: Um filtro não pode criar componentes na frequência, pelo que não pode aumentar o valor de B_{total}. Contudo, se |H(f)| for maior para $f>B_{90\%}$ que para $f<B_{90\%}$, a banda a 90% pode aumentar (aproxima-se de B_{total}).
   d. O sinal x(t) é amostrado e submetido a um quantizador com $2^{10} = 1024$ níveis. Qual o ritmo binário mínimo para o transmitir?
   Resposta: $F_a \geq 2B_{total} = 1\text{kHz} \Rightarrow R_b \geq F_a \nu \geq 10kbps$

2. [12 val] Considere a transmissão do sinal PAM $x(t) = \sum_k a_k r(t-kT)$ com r(t)=rect((t+T/4)/(T/2))-rect((t-T/4)/(T/2)) e $a_k = 0$ ou A, consoante o bit a transmitir é 0 ou 1. O sinal recebido é $z(t)=x(t)+w(t)$ em que $w(t)$ é um ruído Gaussiano com densidade espectral de potência $S_w(f) = N_0/2$. O sinal $z(t)$ é submetido a um filtro com resposta impulsiva $h(t) = r(-t)$, dando origem ao sinal $y(t)+n(t)$ com $y(t) = \sum_k a_k p(t-kT)$ e $n(t)=w(t)*h(t)$.
   a. Calcule a densidade espectral de potência de $x(t)$ e respectiva energia média por bit.
   Resposta:
   $R(f) = sinc(fT/2)T/2\left(e^{j2\pi fT/4} - e^{-j2\pi fT/4}\right) = jTsinc(fT/2)sin(\pi fT/2)$
   $R(k/T) = jTsinc(k/2)sin(\pi k/2)$
   $\overline{a_k} = A/2 \qquad \overline{a_k^2} = A^2/2$
   $$S_x(f) = \frac{A^2}{4T}|R(f)|^2 + \frac{A^2}{4T^2}\sum_k \left|R\left(\frac{k}{T}\right)\right|^2 \delta(f - k/T)$$
   $P_x = A^2/2 \Rightarrow E_b = P_x T_b = A^2T/2$
   b. Este sinal é adequado para transmissão digital num canal que corta as baixas frequências?
   Resposta: Sim, pois $S_x(f) = 0$ para f=0 (o sinal não tem componentes de baixa frequência que seriam filtrada por um canal passa alto).
   c. Mostre que a potência de $n(t)$ é $P_n = N_0T/2$.
   Resposta: $P_n = \int_{-\infty}^{+\infty} S_n(f)df = N_0/2 \int_{-\infty}^{+\infty}|H(f)|^2 df = N_0T/2$
   d. O sinal recebido é amostrado nos instantes kT, dando origem às amostras $y_k + n_k$. Mostre que $y_k = a_kT$.
   Nota: p(t) é contínuo e tem duração 2T.
   Resposta: p(t) tem duração 2T pois r(t) e h(t) têm duração T. Como p(t) é contínuo (r(t) e h(t) não têm Diracs), tem-se p(t)=0, |t|≥T, ou seja, p(kT)=0, k≠0. Além disso,
   $$p(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} r(\tau)h(-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} |r(\tau)|^2 d\tau = T$$
   Deste modo, $y_k = a_kp(0) = a_kT$.

e. Calcule a probabilidade de erro em função de E_b/N_0.

Resposta: $y_k = AT$ ou 0 e $\sigma_N^2 = P_n = N_0T/2$ =>

$P_e = Q(AT/2/\sigma_n) = Q\left(\sqrt{A^2T^2/4/\sigma_n^2}\right) = Q\left(\sqrt{A^2T/2/N_0}\right) = Q\left(\sqrt{E_b/N_0}\right)$