

Teste : 90 minutos.

Coloque o número no **canto superior direito** de todas as folhas e o nome na primeira folha, pelo menos. Responda às perguntas individualmente, e de um modo sucinto. Limite primeiramente as respostas aos pontos essenciais, e depois, no final, complete-as. **É permitido utilizar o formulário disponibilizado nas páginas electrónicas da disciplina.**

As alíneas de cada pergunta têm a mesma cotação.

1. [8 val] Considere o sinal 4-PAM em que se transmite o sinal $x(t) = \sum_n a_n r(t - nT)$ com $r(t) = \text{rect}(t/T)$ e $a_n = 0, A, 2A, 3A$ para os pares de bits 11,10,00,01, respetivamente. Esse sinal é recebido na presença de ruído AWGN com PSD $N_0/2$, sendo submetido a um filtro adaptado.

- a) Qual a potência do sinal transmitido, da componente DC e a energia média por bit?

$$P_x = \overline{|x(t)|^2} = \overline{a_n^2} = 14A^2/4 \text{ (pois } r(t) = \text{rect}(t/T))$$

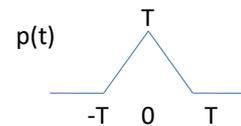
$$x_{DC} = \overline{a_n} = 3A/2 \text{ (pois } r(t) = \text{rect}(t/T)) \Rightarrow P_{DC} = 9A^2/4$$

$$E_b = P_x T_b = P_x T/2 = 7A^2 T/4$$

- b) Mostre que a componente de sinal no instante óptimo de amostragem é $a_n T$.

$$\text{Filtro adaptado: } h(t) = r(-t) = r(t) \Rightarrow p(t) = r(t) * h(t) = T \text{tri}(t/T)$$

$$\Rightarrow p(nT) = 0, k \neq 0 \Rightarrow y_n = a_n p(0) = a_n T = 0, AT, 2AT, 3AT$$



- c) Calcule a probabilidade de erro média por bit como função de E_b/N_0 .

$$\sigma_n^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_n(f) df = N_0/2 \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df = N_0/2 \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|^2 dt = N_0 T/2$$

$$P_{s/0} = P_{s/3A} = Q(AT/2/\sigma_n) \quad P_{s/A} = P_{s/2A} = 2Q(AT/2/\sigma_n)$$

$$P_s = \frac{P_{s/0} + P_{s/A} + P_{s/2A} + P_{s/3A}}{4} = \frac{3}{2} Q(AT/2/\sigma_n)$$

$$P_b \approx \frac{1}{2} P_s = \frac{3}{4} Q(AT/2/\sigma_n) = \frac{3}{4} Q\left(\sqrt{\frac{A^2 T^2/4}{N_0 T/2}}\right) = \frac{3}{4} Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{7N_0}}\right)$$

- d) Qual a degradação na probabilidade de erro face ao caso 4-PAM polar (com $a_n = \pm A, \pm 3A$). [Nota: não é necessário calcular as probabilidades de erro.]

No caso 4-PAM convencional a componente DC é zero, pelo que toda a potência é usada para transmissão de informação. Esta técnica gasta $P_{DC}/P_x = 9/14$ da potência na componente DC, só se aproveitando 5/14 da potência para transmissão de informação, pelo que temos uma degradação de 14/5.

2. [6 val] Considere o sinal BPSK em que o sinal transmitido é $x(t) = \sqrt{2}A \cos(2\pi f_c t + \varphi_k)$ com $\varphi_k = \pm\pi/4$.

- a) Mostre que $x(t) = A \cos(2\pi f_c t) \mp A \sin(2\pi f_c t)$, e use esse resultado para calcular a sua PSD.

$$x(t) = \sqrt{2}A \cos(\varphi_k) \cos(2\pi f_c t) - \sqrt{2}A \sin(\varphi_k) \sin(2\pi f_c t) = A \cos(2\pi f_c t) \mp A \sin(2\pi f_c t)$$

$$\text{pois } \cos(\pm\pi/4) = \sqrt{2}/2 \text{ e } \sin(\pm\pi/4) = \mp\sqrt{2}/2$$

$$\text{Como } x_I(t) = A \text{ e } x_Q(t) = \sum_n a_n r(t - nT). \text{ com } a_n = \pm A \text{ e } r(t) = \text{rect}(t/T), \text{ vem } S_{x_I}(f) = A^2 \delta(f) \text{ e } S_{x_Q}(f) = A^2 T \text{sinc}^2(fT). \text{ Tem-se } S_{\bar{x}}(f) = S_{x_I}(f) + S_{x_Q}(f) \text{ e } S_x(f) = S_{\bar{x}}(f - f_c)/4 + S_{\bar{x}}(-f + f_c)/4$$

- b) Sabendo que a probabilidade de erro dum BPSK convencional (com $\varphi_k = 0$ ou π) é $P_b = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$, calcule a probabilidade de erro deste BPSK.

Neste caso gasta-se metade da potência na componente em fase que é constante (não transmite informação) e a componente em quadratura é do tipo polar NRZ, pelo que se tem uma degradação dum fator de 2 (3dB)

$$\text{relativamente ao caso BPSK convencional, pelo que } P_b = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right).$$

3. [6 val] Pretende-se transmitir a um ritmo binário 5Mbps num canal com banda 1.2MHz. Recorrendo a modulações M-PSK.

- a) Qual o valor de M recomendado?

$$R_{b,max} = \epsilon_{max} B_{Tx} = \log_2(M) B_{Tx}$$

Para $M=16$ vem $R_{b,max} = 4.8\text{Mbps} < 5\text{Mbps}$, pelo que é necessário $M=32$, que tem $R_{b,max} = 6\text{Mbps} > 5\text{Mbps}$

- b) Qual a PSD que recomendaria (incluindo o fator excesso de banda) para os sinais transmitidos? Justifique as respostas.

Recorre-se a impulsos $P(f)$ do tipo raised-cosine. Com 32-PSK tem-se $\epsilon = \frac{\log_2(M)}{1+\rho} = \frac{5}{1+\rho} = \frac{R_b}{B_{Tx}} = \frac{5}{1.2}$, pelo que $\rho = 0.2$. A PSD dos sinais transmitidos é proporcional a $P(f - f_c) + P(-f + f_c) = P(f - f_c) + P(f + f_c)$