Departamento de Engenharia Electrotécnica
Secção de Telecomunicações

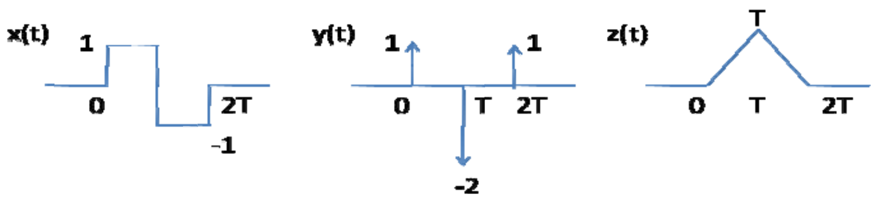
Introdução às Telecomunicações
Mestrado Integrado em Engenharia Electrotécnica
Rui Dinis
9 de Novembro de 2020
1º teste
Semestre Ímpar

Teste : 90 minutos.

Coloque o número no **canto superior direito** de todas as folhas e o nome na primeira folha, pelo menos. Responda às perguntas individualmente, e de um modo sucinto. Limite primeiramente as respostas aos pontos essenciais, e depois, no final, complete-as.
É permitido utilizar o formulário disponibilizado nas páginas electrónicas da disciplina.

1. Considere os sinais $x(t)=\mathrm{rect}((t-T/2)/T)-\mathrm{rect}((t-3T/2)/T)$, $y(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}$ e $z(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$.

   a. Faça um esboço dos gráficos de $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$.
   Resposta:



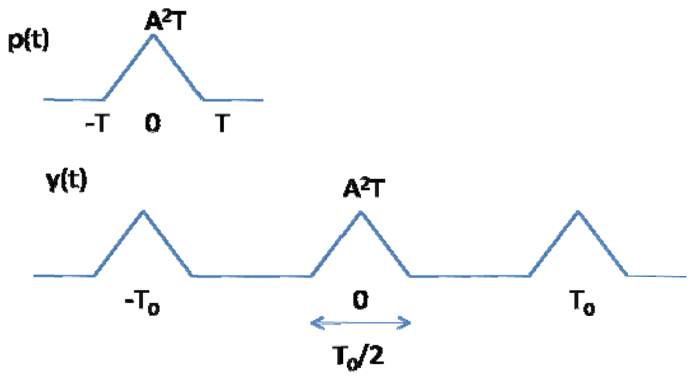
   b. Calcule $X(0)$ e $Y(0)$.
   Resposta:
   $X(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)dt=0$ $\qquad Y(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}y(t)dt=0$

   c. Mostre que $Y(f)=-4\sin^2(\pi fT)e^{-j2\pi fT}$
   Resposta:
   $y(t)=\delta(t)-2\delta(t-T)+\delta(t-2T)$
   $Y(f)=1-2e^{-j2\pi fT}+e^{-j2\pi f2T}=e^{-j2\pi fT}(e^{j2\pi fT}+e^{-j2\pi fT}-2)=$
   $=2e^{-j2\pi fT}(\cos(2\pi fT)-1)=-4\sin^2(\pi fT)e^{-j2\pi fT}$

   d. Use esse resultado (e os das alíneas anteriores) para calcular a transformada de Fourier dum impulso triangular centrado em 0.
   Resposta:
   $Y(f)=-4\sin^2(\pi fT)\exp^{-j2\pi fT}$
   $X(f)=\dfrac{Y(f)}{j2\pi f}$ (pois $Y(0)=0$); $\quad Z(f)=\dfrac{X(f)}{j2\pi f}$ (pois $X(0)=0$)
   $Z(f)=-\dfrac{4\sin^2(\pi fT)}{(j2\pi f)^2}e^{-j2\pi fT}=T^2\mathrm{sinc}^2(fT)e^{-j2\pi fT}$
   $z(t)$ está centrado em T. Para um triângulo centrado em 0 tem-se w(t)=z(t+T) (avanço de T), ou seja
   $W(f)=Z(f)e^{j2\pi fT}=T^2\mathrm{sinc}^2(fT)$

2. Considere o sinal $x(t)=\sum_n r(t-nT_0)$ com $r(t)=A\mathrm{rect}(t/T)$, o qual é submetido a um filtro com resposta impulsiva $h(t)=A\mathrm{rect}(t/T)$ dando origem ao sinal $y(t)$.

   a. Faça um esboço de $y(t)$ para $T=T_0/4$.
   Resposta:
   $y(t)=x(t)*h(t)=\sum_n p(t-nT_0)$, com $p(t)=r(t)*h(t)$



b. Mostre que os coeficientes de Fourier de $y(t)$ são $y_n = \dfrac{A^2T^2}{T_0}\operatorname{sinc}^2(nT/T_0)$.

[Nota 1: $x_n = \dfrac{AT}{T_0}\operatorname{sinc}(nT/T_0)$]

[Nota 2: Só os fundamentalistas de Análise Matemática é que precisam calcular y_n pela definição!]

Resposta:

$$y(t) = x(t) * h(t) \Rightarrow y_n = x_n H(n/T_0) = x_n TA\operatorname{sinc}(nT/T_0) = \frac{A^2T^2}{T_0}\operatorname{sinc}^2(nT/T_0)$$

c. Mostre que $R_x(\tau) = \alpha y(\tau)$ e calcule α.

Resposta:

$$R_x(\tau) = \sum_n |x_n|^2 e^{j2\pi n\tau/T_0}$$

$$|x_n|^2 \propto y_n \quad \Rightarrow \quad R_x(\tau) \propto y(\tau) \quad \Leftrightarrow \quad R_x(\tau) = \alpha y(\tau)$$

$$R_x(0) = P_x = A^2T/T_0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{R_x(0)}{y(0)} = \frac{A^2T/T_0}{A^2T} = \frac{1}{T_0}$$

3. Considere um sinal $x(t)$ com densidade espectral de potência $S_x(f) = \operatorname{rect}(f/B)$.

a. Qual a frequência mínima de amostragem?

Resposta:

$$\text{Banda} = B/2 \Rightarrow F_a = B$$

b. Calcule a potência do sinal e a potência do termo de aliasing na banda do sinal para uma frequência de amostragem $0.9B$.

Resposta:

$$P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)df = B$$

$$P_{\text{aliasing}} = 2(0.5 - 0.4)B = 0.2B$$