FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Engenharia Electrotécnica
Secção de Telecomunicações

Introdução às Telecomunicações
Mestrado Integrado em Engenharia Electrotécnica
Rui Dinis
15 de Dezembro de 2020
2º teste
Semestre Ímpar

Teste : 90 minutos.

Coloque o número no **canto superior direito** de todas as folhas e o nome na primeira folha, pelo menos. Responda às perguntas individualmente, e de um modo sucinto. Limite primeiramente as respostas aos pontos essenciais, e depois, no final, complete-as.
É permitido utilizar o formulário disponibilizado nas páginas electrónicas da disciplina.
As alíneas de cada pergunta têm a mesma cotação.

1. [15 val] Considere o sinal $x(t)=x_I(t)\cos(2\pi f_c t)$ com $x_I(t)=\sum_n a_n r(t-nT)$, em que $a_n=\pm A$ e $r(t)=\mathrm{rect}(t/T)$. No receptor tem-se o sinal $y(t)=x(t)+w(t)$ em que $w(t)$ é um ruído passa-banda centrado em f_c, com banda B>>$1/T$ (admite-se que f_c>>B) e PSD $S_w(f)=\frac{1}{2}N_0\mathrm{rect}((f-f_c)/B)+\frac{1}{2}N_0\mathrm{rect}((f+f_c)/B)$. Tem-se $w(t)=w_I(t)\cos(2\pi f_c t)-w_Q(t)\sin(2\pi f_c t)$ em que $w_I(t)$ e $w_Q(t)$ são as componentes em fase e quadratura do ruído.

   a) Mostre que $x(t)$ é um sinal BPSK com energia média por bit $E_b=A^2T/2$.
   Resolução:
   $$x_I(t)=\pm A \Rightarrow P_{x_I}=A^2 \Rightarrow P_x=A^2/2 \Rightarrow E_b=P_xT_b=A^2T/2$$

   b) Mostre que se pode recuperar $y_I(t)=x_I(t)+w_I(t)$ a partir de $z(t)=y(t)2\cos(2\pi f_c t)$.
   Resolução:
   $$y(t)=y_I(t)\cos(2\pi f_c t)-y_Q(t)\sin(2\pi f_c t)$$
   $$z(t)=y(t)2\cos(2\pi f_c t)=2y_I(t)\cos^2(2\pi f_c t)-y_Q(t)2\sin(2\pi f_c t)\cos(2\pi f_c t)=$$
   $$=y_I(t)+\underbrace{y_I(t)\cos(2\pi 2f_c t)-y_Q(t)\sin(2\pi 2 f_c t)}_{\text{Frequência } 2f_c \text{ (eliminado por um filtro passa-baixo)}}$$

   c) Use o resultado da alínea anterior para mostrar que a PSD de $w_I(t)$ é $S_{w_I}(f)=N_0\mathrm{rect}(f/B)$.
   [Nota: Se $x_I(t)=0$ então $y(t)=w(t)$ e $y_I(t)=w_I(t)$. E a multiplicação por um cosseno corresponde à convolução com dois diracs e a PSD da soma dos termos em f_c e $-f_c$ é a soma das respectivas PSDs.]
   Resolução:
   $$w(t)2\cos(2\pi f_c t)=w_I(t)+\text{termos de frequência } f_c$$
   $$S_{w_I}(f)=S_w(f)*(\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c))\big|_{\text{Baixas frequências}}=$$
   $$=(S_w(f-f_c)+S_w(f+f_c))\big|_{\text{Baixas frequências}}=$$
   $$=\frac{N_0}{2}\mathrm{rect}(f/B)+\frac{N_0}{2}\mathrm{rect}(f/B)=N_0\mathrm{rect}(f/B)$$

   d) O sinal $z(t)$ é submetido a um filtro adaptado $h(t)=r(-t)=r(t)$. Mostre que a potência do termo de ruído na sua saída é $P_n=\sigma^2=N_0T$.
   [Nota: Como f_c>>B>>$1/T$, o filtro adaptado comporta-se como um filtro passa-baixo, eliminando os termos em $2f_c$.]
   Resolução:
   $$n_I(t)=w_I(t)*h(t)\Rightarrow S_{n_I}(f)=S_{w_I}(f)|H(f)|^2\approx N_0|H(f)|^2$$
   $$\sigma^2=P_{n_I}=\int_{-\infty}^{+\infty}S_{n_I}(f)df=N_0\int_{-\infty}^{+\infty}|H(f)|^2\,df=N_0\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|^2\,dt=N_0T$$

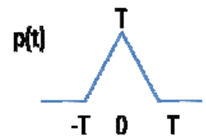
e) Mostre que a componente de sinal à saída do filtro adaptado nos instantes de amostragem kT é $a_k T = \pm AT$. Use esse resultado e o da alínea d) para mostrar que a probabilidade de erro por bit é dada por $P_b = Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right)$.

Resolução:

$z_I(t) = x_I(t) * h(t) = \sum_n a_n p(t - nT)$

$p(t) = r(t) * h(t) \quad \Rightarrow \quad p(kT) = 0, k \neq 0 \quad \Rightarrow \quad z_I(kT) = a_k p(0) = a_k T = \pm AT$

$P_b = Q\left(\frac{AT}{\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{A^2T^2}{\sigma^2}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{A^2T^2}{N_0 T}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$



2. [5 val] Considere um sinal AM sem sobre-modulação $x(t) = A_c(1 + k_a m(t))\cos(2\pi f_c t)$ correspondendo à mensagem $m(t)$ com banda *B*. Recorre-se a um detector de envolvente que usa um rectificador de onda completa, ou seja um detector que começa por calcular $y(t) = |x(t)|$.

a) Mostre que $y(t) = |x(t)| = A_c(1 + k_a m(t))\sum_n r(t - nT_a)$ com T_a=1/2f_c, identificando $r(t)$.

Resolução:

$A_c(1 + k_a m(t)) \geq 0 \;\Rightarrow\; |x(t)| = A_c(1 + k_a m(t))\,|\cos(2\pi f_c t)| = A_c(1 + k_a m(t))\sum_n r(t - nT_a)$

com $T_a = 1/2 f_c = T_c/2$, e $r(t) = \cos(2\pi f_c t)\mathrm{rect}(2t/Tc)$,

pois $|\cos(2\pi f_c t)|$ é periódico com período $T_c/2$

b) Usando o resultado anterior, mostre em que condições é possível recuperar a mensagem? [Sugestão: Recorra ao teorema da amostragem.]

Resolução:

$|\cos(2\pi f_c t)| = \sum_n r(t - nT_a) = \sum_n r_n e^{j2\pi nt/T_a}$, com r_0>0 (componente DC), e $y(t)$ é uma versão amostrada de $A_c(1 + k_a m(t))$ com frequência de amostragem F_a=2f_c. Consegue-se recuperar o sinal amostrado (mensagem) se $F_a > 2B \Leftrightarrow B < f_c$

c) Repita a alínea anterior para um rectificador de meia onda com $y(t) = x(t),\ x(t) > 0$ e $y(t) = 0,\ x(t) < 0$.

Resolução:

Neste caso só as arcadas positivas do cosseno é que sobram, pelo que $T_a = T_c \Leftrightarrow F_a = f_c$. Recupera-se a mensagem se $F_a > 2B \Leftrightarrow B < f_c/2$